

# **Lösung von Mehrkörperproblemen**

von Michael Müller

## **Gliederung:**

### **1. Einleitung**

#### **1.1. Form**

#### **1.2. Gravitation**

### **2. Das Einkörperproblem (in einem radialsymmetrischen Gravitationsfeld)**

#### **2.1. Keplergesetze und Herleitung**

#### **2.2. Herleitung und Anwendung der Keplergleichung**

#### **2.3. Spezialfälle (eindimensional)**

##### **2.3.1. Weg-Zeit-Gleichung (Ruhelage) mittels Keplergleichung**

##### **2.3.2. Weg-Zeit-Gleichung (Ruhelage) mittels Differentialgleichungen**

##### **2.3.3. Weg-Zeit-Gleichung mittels Differentialgleichungen**

### **3. Das Zweikörperproblem**

#### **3.1. Beweis, dass sich zwei Körper immer in einer Ebene bewegen**

#### **3.2. Bewegung zweier Körper**

#### **3.3. Spezialfälle (eindimensional)**

##### **3.3.1. Weg-Zeit-Gleichung (Ruhelage) mittels Differentialgleichungen**

##### **3.3.2. Weg-Zeit-Gleichung mittels Differentialgleichungen**

### **4. 3- und Mehrkörperprobleme**

#### **4.1. Prinzip der numerischen Lösung**

#### **4.2. ORBITER**

##### **4.2.1. Programmentwicklung**

###### **4.2.1.1. Grundstruktur**

###### **4.2.1.2. Grafik**

###### **4.2.1.3. Genauigkeitsüberprüfung**

###### **4.2.1.3.1. Energie**

###### **4.2.1.3.2. $W_{\text{act}}$**

###### **4.2.1.4. Optimierung der Genauigkeit**

###### **4.2.1.5. 3D-Erweiterung**

###### **4.2.1.6. Sonstiges**

##### **4.2.2. Ergebnisse**

- 4.2.2.1. Programm
- 4.2.2.2. Genauigkeit
  - 4.2.2.2.1. Pythagoras
  - 4.2.2.2.2. 8er Bahn
  - 4.2.2.2.3. Sonnensystem
- 4.2.3. Diskussion
- 5. Danksagung
- 6. Literaturverzeichnis
- 7. Anhang
  - 7.1. Weitere Beweise und Herleitungen
    - 7.1.1. Gesamtenergie auf einer Ellipsenbahn
    - 7.1.2. Entfernungssumme und Tangentenwinkel
    - 7.1.3. Bestimmung einer Ellipsenbahn
    - 7.1.4. Beweis, dass sich #E2.3.1.24 und #E2.3.2.21 entsprechen
  - 7.2. Zahlenbeispiele und Graphen
    - 7.2.1. Zahlenbeispiel zu 2.2.
    - 7.2.2. Graph zu 2.3.1.
    - 7.2.3. Zahlenbeispiel zu 2.3.2.
    - 7.2.4. Graphen zu 2.3.3.
    - 7.2.5. Zahlenbeispiel zu 2.3.3.
    - 7.2.6. Zahlenbeispiel zu 3.3.1.
  - 7.3. Handbuch

## 1. Einleitung

Ein Ziel dieser BLL (Besondere Lernleistung) ist es, ausgehend von Newtons Universellem Gravitationsgesetz, die Bewegung eines Körpers (in einem radialsymmetrischen Gravitationsfeld) (2.) und die Bewegung zweier Körper (3.) möglichst erschöpfend herzuleiten. Dabei werden besonders die eindimensionalen Spezialfälle (2.3. und 3.3.) betrachtet.

Die Untersuchung von Problemen mit 3 oder mehr Körpern erfolgt in Kapitel 4. Dieses Kapitel entspricht größtenteils einer Jugend forscht - Arbeit, die ich zum Thema „Numerische Lösung von Mehrkörperproblemen“ angefertigt habe (#Q1). Das Ziel dieses Teils der BLL ist einerseits die computergestützte Berechnung der Bewegung von  $n$  Körpern unter dem Einfluss der Gravitation, andererseits die visuelle Darstellung der berechneten Daten.

Daraus ergeben sich die folgenden Fragestellungen:

- Wie muss ein Computerprogramm beschaffen sein, das den gestellten Anforderungen genügt?
- Wie kann man die Genauigkeit der berechneten Ergebnisse überprüfen?
- Mit welchen Methoden kann man die Rechengenauigkeit erhöhen?

Diese werden in Kapitel 4 eingehend behandelt.

## 1.1. Form

Zu formalen Gestaltung dieser Arbeit:

Verweise auf Quellen haben die Form #Qx.

Die Bezeichnung für Grafiken und Diagramme lautet #Gx.

Tabellen werden mit #Tx bezeichnet.

Gleichungen werden entsprechend #Ex numeriert (von engl. equation).

Dabei werden die Verweise nach folgenden Schemata gebildet:

1. global: x wird aus der Kapitelnummer und aus der kapitelinternen Bezeichnungsnummer gebildet (ein Verweis auf Gleichung 3 in Kapitel 2.3.1. würde #E2.3.1.3 lauten)
2. lokal (im gleichen Kapitel): x ist gleich der kapitelinternen Bezeichnungsnummer (ein Verweis auf Gleichung 3 im gleichen Kapitel würde #E3 lauten)

$\vec{r}$  bezeichnet einen Radiusvektor.

$\vec{v}$  bezeichnet einen Geschwindigkeitsvektor.

$\vec{a}$  bezeichnet einen Beschleunigungsvektor.

$\vec{F}$  bezeichnet einen Kraftvektor.

(Bei der Behandlung der eindimensionalen Spezialfälle werden die Vektorpfeile weggelassen. Weiterhin sind die Gleichungen am Ende der entsprechenden Kapitel kaum optimiert.)

$m_a$  ist die Masse des Körpers a. Gleiches gilt auch für die anderen Eigenschaften eines Körpers.

$\vec{r}_{ab}$  ist der Vektor von a nach b, also gilt:

$$\text{\#E1: } \vec{r}_{ab} = \vec{r}_b - \vec{r}_a$$

## 1.2. Gravitation

Laut Newtons universellem Gravitationsgesetz gilt:

$$\text{\#E1: } \vec{F} = -G * m * M * \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

(G ist die Gravitationskonstante;  $G=6,672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  )

Laut dem zweiten Newtonschen Gesetz gilt:

$$\#E2: \vec{F} = m * \vec{a}$$

daraus folgt:

$$\#E3: \vec{a} = -G * M * \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

da #E4:  $\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$  folgt:

$$\#E5: \ddot{\vec{r}} = -G * M * \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Bei 2 Körpern a und b wirkt also auf a die Kraft:

$$\#E6: \vec{F} = -G * m_a * m_b * \frac{\vec{r}_{ba}}{|\vec{r}_{ba}|^3}$$

wegen #E1.1.1 folgt:

$$\#E7: \vec{F} = -G * m_a * m_b * \frac{\vec{r}_a - \vec{r}_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3}$$

die entsprechende Beschleunigung ist:

$$\#E8: \ddot{\vec{r}}_a = -G * m_b * \frac{\vec{r}_a - \vec{r}_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3}$$

Da sich bei mehreren Körpern die Kräfte und somit auch die Beschleunigungen vektoriell addieren, folgt für jeden der n Körper:

$$\#E9: \ddot{\vec{r}}_i = -G * \sum_{j=1}^n \left( m_j * \frac{\vec{r}_{ji}}{|\vec{r}_{ji}|^3} \right) \quad | \text{ für } j \text{ ungleich } i$$

also:

$$\#E10: \ddot{\vec{r}}_i = -G * \sum_{j=1}^n \left( m_j * \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \right) \quad | \text{ für } j \text{ ungleich } i$$

dabei ist  $\ddot{\vec{r}}_i$  die Gesamtbeschleunigung des Körpers i  $| i \in \{1..n\}$

## 2. Das Einkörperproblem (in einem radialsymmetrischen Gravitationsfeld)

Wenn nur ein Körper vorhanden ist und keine Kräfte auf ihn einwirken, ist die Lösung des Problems trivial. Da keine Kraft wirkt ( $|\vec{F}| = 0$ ), ist laut #E1.2.2 auch keine Beschleunigung vorhanden:

$$\text{\#E1: } |\ddot{\vec{r}}| = 0$$

Wenn wir #E1 nach der Zeit integrieren, erhalten wir:

$$\text{\#E2: } |\dot{\vec{r}}| = \text{const}$$

Der Körper bewegt sich also mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer Geraden (oder er verharrt bei  $|\vec{v}| = 0$  am Ausgangspunkt).

Nun wollen wir die Bewegung eines Körpers in einem radialsymmetrischen Gravitationsfeld betrachten. Dies ist ein Spezialfall eines Zweikörperproblems, wobei die Masse des einen Körpers gegenüber der des anderen Körpers vernachlässigbar klein ist. Das ist in guter Näherung bei der Bewegung eines Planeten um die Sonne der Fall:

### 2.1. Keplergesetze und Herleitung

Der Mathematiker und Astronom Johannes Kepler stellte die folgenden, nach ihm benannten, Gesetze der Planetenbewegung auf:

**Erstes Kepler-Gesetz:** Trabanten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt der Zentralkörper steht.

**Zweites Kepler-Gesetz:** Der vom Zentralkörper zum Trabanten gezogene Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

**Drittes Kepler-Gesetz:** Die Quadrate der Umlaufzeiten  $T_1$  und  $T_2$  zweier Trabanten um den gleichen Zentralkörper verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen  $a_1$  und  $a_2$ :

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad \text{oder} \quad \frac{a^3}{T^2} = C$$

Im Folgenden wollen wir die Kepler-Gesetze mit Hilfe von Newtons universellem Gravitationsgesetz (siehe 1.2.) herleiten:  
(Diese Herleitung erfolgt in Anlehnung an #Q2, S. 216ff.)

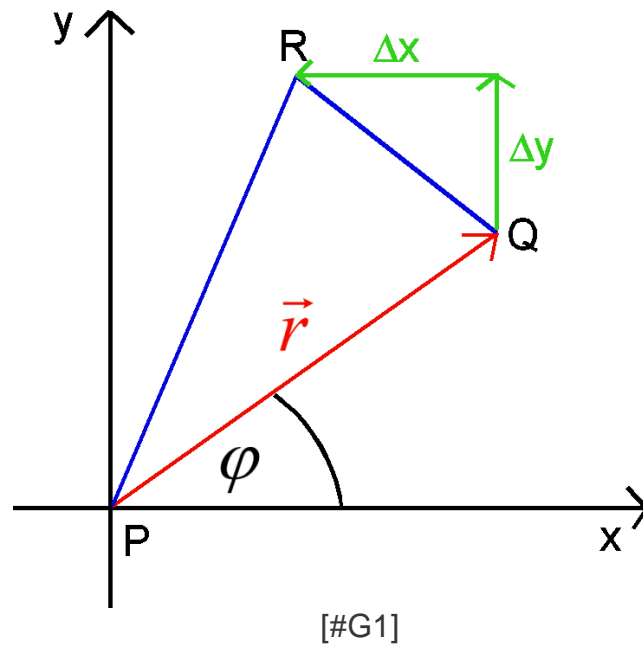
Wir benutzen sogenannte Polarkoordinaten. Dabei gibt man den Abstand  $r = |\vec{r}|$  eines Punktes vom Ursprung an und den Winkel  $\varphi$ , den der Abstandsvektor  $\vec{r}$  mit der x-Achse einschließt (siehe #G1).

Polarkoordinaten lassen sich leicht in rechtwinklige Koordinaten übertragen, da sich folgende Gleichungen aus einfachen trigonometrischen Beziehungen ergeben:

$$\text{\#E1: } x = |\vec{r}| \cdot \cos \varphi$$

und

$$\text{\#E2: } y = |\vec{r}| \cdot \sin \varphi$$



Die Kraft, die zwischen einem Planeten ( $m$ ) und der Sonne ( $M$ ) wirkt, ist gegeben durch:

$$\text{\#E3: } \vec{F} = -G * m * M * \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Die entsprechende Beschleunigung ist:

$$\text{\#E4: } \ddot{\vec{r}} = -G * M * \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Und als Betrag:

$$\text{\#E5: } |\ddot{\vec{r}}| = -G * M * \frac{1}{|\vec{r}|^2}$$

Wir führen nun ein ebenes Koordinatensystem ein, in dessen Ursprung sich die Sonne befindet. Laut #E1 und #E2 sind die Beschleunigungskomponenten:

$$\text{\#E6: } \ddot{x} = -\frac{G * M}{|\vec{r}|^2} * \cos \varphi$$

und

$$\#E7: \ddot{y} = -\frac{G * M}{|\vec{r}|^2} * \sin \varphi$$

Mit Hilfe von #E1 und #E2 erhält man:

$$\#E8: x * \ddot{y} - y * \ddot{x} = 0$$

Wenn wir #E8 nach der Zeit integrieren, erhalten wir (mit E als Integrationskonstante):

$$\#E9: x * \dot{y} - y * \dot{x} = E$$

Wir setzen  $E = 2 * \dot{A}$ :

$$\#E10: x * \dot{y} - y * \dot{x} = 2 * \dot{A}$$

$$\#E11: \dot{A} = \frac{1}{2} * (x * \dot{y} - y * \dot{x})$$

Wie Einschub 1 zeigt, ist #E11 gleichbedeutend mit dem Flächensatz (da dieser Ausdruck konstant ist).

Damit haben wir das **zweite Kepler-Gesetz** hergeleitet.

┌  
Einschub 1:

Laut der Dreiecksformel der analytischen Geometrie (#Q3, S. 171) gilt:

$$\#E12: \Delta A = \frac{1}{2} * [(x_1 - x_2) * (y_1 + y_2) + (x_2 - x_3) * (y_2 + y_3) + (x_3 - x_1) * (y_3 + y_1)]$$

In unserem Fall hat das Dreieck die Eckpunkte  $P(0 | 0)$ ,  $Q(x | y)$  und  $Q(x + \Delta x | y + \Delta y)$  ( $\Delta x$  ist die während  $\Delta t$  in x-Richtung zurückgelegte Strecke,  $\Delta y$  ist die während  $\Delta t$  in y-Richtung zurückgelegte Strecke) (siehe #G1):

$$\#E13: \Delta A = \frac{1}{2} * [(-x) * (y) + (x - x - \Delta x) * (y + y + \Delta y) + (x + \Delta x) * (y + \Delta y)]$$

$$\#E14: \Delta A = \frac{1}{2} * [-x * y - 2 * y * \Delta x - \Delta x * \Delta y + x * y + x * \Delta y + y * \Delta x + \Delta x * \Delta y]$$

$$\#E15: \Delta A = \frac{1}{2} * (x * \Delta y - y * \Delta x)$$

Jetzt dividieren wir #E16 durch die Zeit  $\Delta t$ , die der Planet braucht, um von Q nach R zu kommen:

$$\text{\#E16: } \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} * \left( x * \frac{\Delta y}{\Delta t} - y * \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)$$

Jetzt bilden wir den Grenzwert von #E16 für  $\Delta t$  gegen 0:

$$\text{\#E17: } \dot{A} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} * \left( x * \frac{\Delta y}{\Delta t} - y * \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2} * (x * \dot{y} - y * \dot{x})$$

( $\dot{A}$  ist die Flächengeschwindigkeit)

Wenn

$$\text{\#E18: } \dot{A} = \frac{1}{2} * (x * \dot{y} - y * \dot{x})$$

konstant ist, ist der Flächensatz erfüllt.

L

Jetzt rechnen wir #E18 in Polarkoordinaten um:

Zuerst leiten wir #E1 und #E2 nach der Zeit ab und erhalten:

$$\text{\#E19: } \dot{x} = |\dot{\vec{r}}| * \cos \varphi - |\vec{r}| * \dot{\varphi} * \sin \varphi$$

und

$$\text{\#E20: } \dot{y} = |\dot{\vec{r}}| * \sin \varphi + |\vec{r}| * \dot{\varphi} * \cos \varphi$$

#E1, #E2, #E19 und #E20 in #E18 à

$$\text{\#E21: } \dot{A} = \frac{1}{2} * \left[ |\vec{r}| * \cos \varphi * (|\dot{\vec{r}}| * \sin \varphi + |\vec{r}| * \dot{\varphi} * \cos \varphi) - |\vec{r}| * \sin \varphi * (|\dot{\vec{r}}| * \cos \varphi - |\vec{r}| * \dot{\varphi} * \sin \varphi) \right]$$

$$\text{\#E22: } \dot{A} = \frac{1}{2} * (|\vec{r}| * \cos \varphi * |\dot{\vec{r}}| * \dot{\varphi} * \cos \varphi + |\vec{r}| * \sin \varphi * |\vec{r}| * \dot{\varphi} * \sin \varphi)$$

$$\text{\#E23: } \dot{A} = \frac{1}{2} * |\vec{r}|^2 * \dot{\varphi} * (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$$

da  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$  folgt:

$$\text{\#E24: } \dot{A} = \frac{1}{2} * |\vec{r}|^2 * \dot{\varphi}$$

$$\text{\#E25: } |\vec{r}|^2 = \frac{2 * \dot{A}}{\dot{\varphi}}$$



$$\#25 \text{ in } \#E6 \rightarrow \#E26: \ddot{x} = -\frac{G * M * \dot{\varphi}}{2 * \dot{A}} * \cos \varphi$$

$$\#25 \text{ in } \#E7 \rightarrow \#E27: \ddot{y} = -\frac{G * M * \dot{\varphi}}{2 * \dot{A}} * \sin \varphi$$

Jetzt integrieren wir #E26 und #E27 nach der Zeit und erhalten:

$$\#E28: \dot{x} = -\frac{G * M}{2 * \dot{A}} * \sin \varphi + C$$

und

$$\#E29: \dot{y} = +\frac{G * M}{2 * \dot{A}} * \cos \varphi + D$$

Wir wählen die Anfangsbedingungen so, dass für  $\varphi = 0$  auch  $\dot{x} = 0$  wird. Damit steht der Geschwindigkeitsvektor für  $\varphi = 0$  senkrecht auf der x-Achse (so erhalten wir eine besonders einfache Gleichung). Wegen der Anfangsbedingung ist  $C = 0$ :

$$\#E30: \dot{x} = -\frac{G * M}{2 * \dot{A}} * \sin \varphi$$

#E1, #E2, #E29 und #E30 in #E18  $\rightarrow$

$$\#E31: \dot{A} = \frac{1}{2} * \left( \frac{G * M}{2 * \dot{A}} * |\vec{r}| * \cos^2 \varphi + D * |\vec{r}| * \cos \varphi + \frac{G * M}{2 * \dot{A}} * |\vec{r}| * \sin^2 \varphi \right)$$

$$\#E32: \dot{A} = \frac{1}{2} * \left( \frac{G * M}{2 * \dot{A}} * |\vec{r}| + D * |\vec{r}| * \cos \varphi \right)$$

$$\#E33: \dot{A} = |\vec{r}| * \left( \frac{G * M}{4 * \dot{A}} + \frac{1}{2} * D * \cos \varphi \right)$$

$$\#E34: 4 * \dot{A}^2 = |\vec{r}| * (G * M + 2 * \dot{A} * D * \cos \varphi)$$

$$\#E35: |\vec{r}| = \frac{4 * \dot{A}^2}{G * M + 2 * \dot{A} * D * \cos \varphi}$$

$$\#E36: |\vec{r}| = \frac{\frac{4 * \dot{A}^2}{G * M}}{1 + \frac{2 * \dot{A} * D}{G * M} * \cos \varphi}$$

Wenn wir  $p = \frac{4 * \dot{A}^2}{G * M}$  und  $\varepsilon = \frac{2 * \dot{A} * D}{G * M}$  setzen, erhalten wir:

$$\text{\#E37: } |\vec{r}| = \frac{p}{1 + \varepsilon * \cos \varphi}$$

Dies ist die Gleichung eines Kegelschnitts mit der Sonne in einem Brennpunkt. Für  $\varepsilon = 0$  ergibt sich ein Kreis, für  $0 < \varepsilon < 1$  eine Ellipse, für  $\varepsilon = 1$  eine Parabel und für  $\varepsilon > 1$  eine Hyperbel.

Damit haben wir das **erste Kepler-Gesetz** hergeleitet.

Wenn wir den Flächensatz auf die ganze Ellipse anwenden, erhalten wir

$$\text{\#E38: } \pi * a * b = \dot{A} * T$$

( $\pi * a * b$  ist die Fläche der Ellipse,  $T$  ist die Umlaufzeit des Planeten auf der Ellipse)

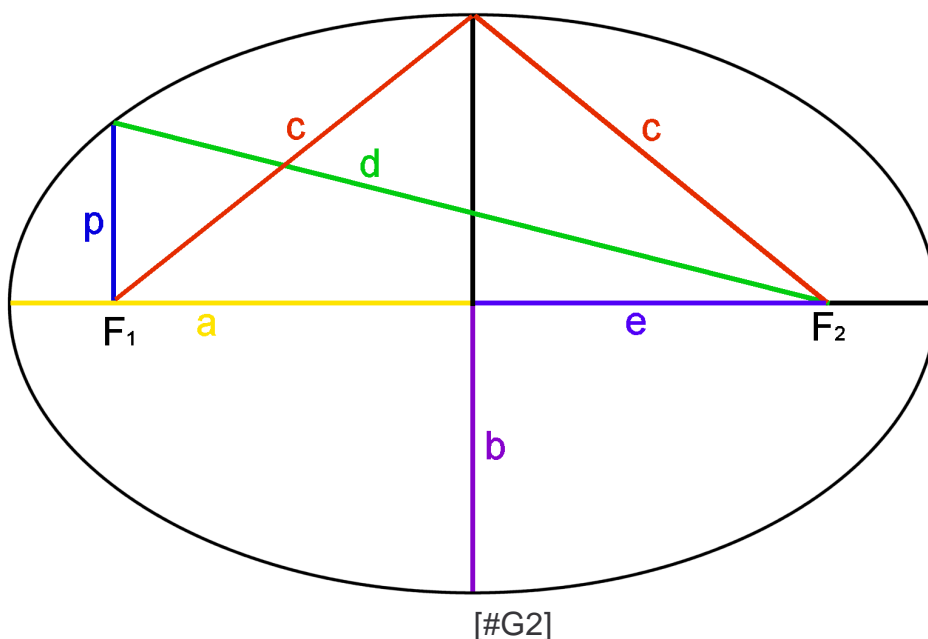
Durch Quadrieren erhalten wir:

$$\text{\#E39: } \pi^2 * a^2 * b^2 = \dot{A}^2 * T^2$$

Jetzt setzen wir #E48:  $b^2 = a * p$  ein (siehe Einschub 2):

$$\text{\#E40: } \pi^2 * a^3 * p = \dot{A}^2 * T^2$$

┌  
Einschub 2:



Es gilt :

$$\#E41: e^2 + b^2 = c^2$$

(mit  $e = \varepsilon * a$ )

Da laut 7.1.2. die Summe der Entfernungen eines Punktes der Ellipse zu den beiden Brennpunkten gleich  $2*a$  ist, muss  $c=a$  sein:

$$\#E42: a^2 = e^2 + b^2$$

Weiterhin gilt:

$$\#E43: p^2 + (2 * e)^2 = d^2$$

Da, wie bereits erwähnt, laut 7.1.2. die Summe der Entfernungen eines Punktes der Ellipse zu den beiden Brennpunkten gleich  $2*a$  ist, muss  $d=2*a-p$  sein:

$$\#E44: p^2 + (2 * e)^2 = (2 * a - p)^2$$

$$\#E45: p^2 + 4 * e^2 = 4 * a^2 - 4 * a * p + p^2$$

$$\#E46: e^2 = a^2 - a * p$$

$$\#E47: a * p = a^2 - e^2$$

$$\#E42 \text{ in } \#E47 \rightarrow \#E48: a * p = b^2$$

L

Jetzt setzen wir  $p = \frac{4 * \dot{A}^2}{G * M}$  ein (siehe Übergang zwischen #E36 und #E37):

$$\#E49: \pi^2 * a^3 * \frac{4 * \dot{A}^2}{G * M} = \dot{A}^2 * T^2$$

$$\#E50: \frac{a^3}{T^2} = \frac{G * M}{4 * \pi^2}$$

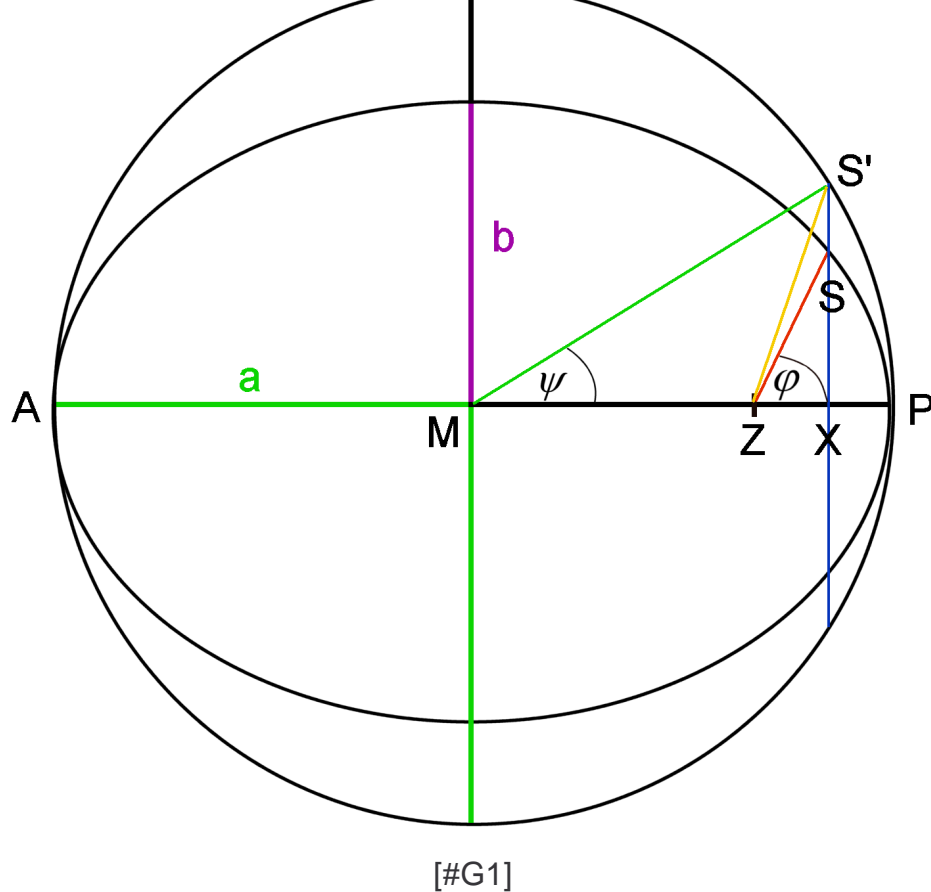
Da  $\frac{G * M}{4 * \pi^2}$  bei dem gleichen Zentralkörper konstant ist, ist somit auch  $\frac{a^3}{T^2}$  konstant.

Damit haben wir das **dritte Kepler-Gesetz** hergeleitet.

## 2.2. Herleitung und Anwendung der Keplergleichung

Im Folgenden wollen wir die Beziehung zwischen der Position eines Trabanten auf einer Ellipsenbahn und der Zeit, die er benötigt, um diese Position zu erreichen, genauer betrachten:

(Diese Herleitung erfolgt in Anlehnung an #Q4, Kapitel 4.33.)



$$\#E1: F_{SZP} = \frac{b}{a} * F_{S'ZP}$$

|  $F_{SZP}$  ist der Flächeninhalt des durch diese Eckpunkte begrenzten Teils der Ellipse (begrenzt durch Strecke SZ, Strecke ZP und Bogen PS)

|  $F_{S'ZP}$  ist der Flächeninhalt der  $F_{SZP}$  entsprechenden Fläche auf dem Hauptkreis

$$\#E2: F_{SZP} = \frac{b}{a} * (F_{S'MP} - F_{S'MZ})$$

- |  $F_{S'MP}$  ist der Flächeninhalt des Kreissektors mit diesen drei Eckpunkten
- |  $F_{S'MZ}$  ist der Flächeninhalt des Dreiecks mit diesen drei Eckpunkten

da  $F_{S'MZ} = \frac{1}{2} * a * h_a$  und  $\sin \psi = \frac{h_a}{e}$  (mit  $e = \overline{MZ}$ ) folgt:

$$\#E3: F_{SZP} = \frac{b}{a} * \left( \frac{a^2 * \psi}{2} - \frac{a * e}{2} * \sin \psi \right)$$

$$\#E4: F_{SZP} = \frac{a * b}{2} * (\psi - \varepsilon * \sin \psi)$$

aus dem zweiten Kepler-Gesetz folgt:

$$\#E5: \frac{F_{SZP}}{t} = \frac{\pi * a * b}{T}$$

|  $\pi * a * b$  ist die Fläche der Ellipse  
|  $T$  ist die Umlaufzeit eines Trabanten auf der Ellipse

$$\#E6: F_{SZP} = \frac{\pi * a * b}{T} * t$$

$$\#E6 = \#E4 \rightarrow \#E7: \frac{\pi * a * b}{T} * t = \frac{a * b}{2} * (\psi - \varepsilon * \sin \psi)$$

daraus folgt die Kepler-Gleichung:

$$\#E8: \frac{2 * \pi}{T} * t = \psi - \varepsilon * \sin \psi$$

aus #G1 entnehmen wir:

$$\#E9: \cos \psi = \frac{\overline{MX}}{a}$$

$$\#E10: \cos \psi = \frac{e + \overline{ZX}}{a}$$

| mit  $e = \overline{MZ}$

$$\#E11: a * \cos \psi = e + \overline{ZX}$$

aus #G1 entnehmen wir weiterhin:

$$\#E12: \cos \varphi = \frac{\overline{ZX}}{r}$$

| mit  $r = \overline{ZS}$

$$\#E13: \overline{ZX} = r * \cos \varphi$$

$$\#E13 \text{ in } \#E11 \rightarrow \#E14: a * \cos \psi = e + r * \cos \varphi$$

$$\#E15: r = \frac{a * \cos \psi - e}{\cos \varphi}$$

die Ellipsengleichung laut #E2.1.37 lautet:

$$\#E16: r = \frac{p}{1 + \varepsilon * \cos \varphi} \quad | \quad |\vec{r}| \text{ aus \#E2.1.37 entspricht hier } r$$

$$\#E16 = \#E15 \rightarrow \#E17: \frac{p}{1 + \varepsilon * \cos \varphi} = \frac{a * \cos \psi - e}{\cos \varphi}$$

$$\#E18: p * \cos \varphi = (a * \cos \psi - e) * (1 + \varepsilon * \cos \varphi)$$

$$\#E19: p * \cos \varphi = a * \cos \psi - e + a * \varepsilon * \cos \varphi * \cos \psi - e * \varepsilon * \cos \varphi$$

$$\#E20: p * \cos \varphi - a * \varepsilon * \cos \varphi * \cos \psi + e * \varepsilon * \cos \varphi = a * \cos \psi - e$$

$$\#E21: \cos \varphi * (p - a * \varepsilon * \cos \psi + e * \varepsilon) = a * \cos \psi - e$$

$$\#E22: \cos \varphi = \frac{a * \cos \psi - e}{p - a * \varepsilon * \cos \psi + e * \varepsilon}$$

Gleichung #E2.1.47 lautet:

$$\#E23: a * p = a^2 - e^2$$

$$\#E24: p = a - e * \varepsilon$$

$$\#E24 \text{ in } \#E22 \rightarrow \#E25: \cos \varphi = \frac{a * \cos \psi - e}{a - e * \varepsilon - a * \varepsilon * \cos \psi + e * \varepsilon}$$

$$\#E26: \cos \varphi = \frac{\cos \psi - \varepsilon}{1 - \varepsilon * \cos \psi}$$

$$\#E26 \text{ in } \#E15 \rightarrow \#E27: r = \frac{a * \cos \psi - e}{\left( \frac{\cos \psi - \varepsilon}{1 - \varepsilon * \cos \psi} \right)}$$

$$\#E28: r = a * \frac{(\cos \psi - \varepsilon) * (1 - \varepsilon * \cos \psi)}{(\cos \psi - \varepsilon)}$$

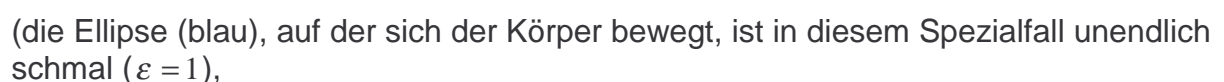
$$\#E29: r = a * (1 - \varepsilon * \cos \psi)$$

In 7.2.1. wird hierzu ein Zahlenbeispiel gerechnet.

In den folgenden Unterkapiteln werden wir einige interessante Spezialfälle betrachten. Bei diesen Spezialfällen findet der gesamte Bewegungsvorgang in einer Dimension (innerhalb einer Geraden) statt. Es werden dabei zwei verschiedene Methoden zur Herleitung einer Weg-Zeit-Gleichung benutzt. In 2.3.1. wird die in 2.2. hergeleitete Keplergleichung verwendet. In 2.3.2. und 2.3.3. erfolgt die Herleitung mittels Differentialgleichungen. (Wie schon in 1.1. erwähnt, werden im Folgenden keine Vektorpfeile benutzt, da es sich nur um eindimensionale Vektoren handelt.)

Dieser Spezialfall beschreibt den Fall zweier Massepunkte aufeinander zu, wobei berücksichtigt wird, dass die Beschleunigung nicht konstant ist, sondern dass sie sich während des Falls ändert. Weiterhin nehmen wir bei diesem Spezialfall an, dass die Masse des einen Körpers relativ zu der des anderen Körpers zu vernachlässigen ist.

Wir betrachten das Bezugssystem, in welchem sich der Schwerpunkt (also die Zentralmasse) in Ruhe befindet. Die Anfangsentfernung des fallenden Körpers sei  $d$ . Bei diesem Spezialfall gehen wir weiterhin davon aus, dass der Körper keine Anfangsgeschwindigkeit besitzt.



M ist die Zentralmasse,  
a ist die große Halbachse der Ellipse bzw. der Radius des Kreises,  
r ist die Entfernung eines Punktes der Ellipse von M,  
d=2a)

Laut dem 3. Keplerschen Gesetz ist die Umlaufzeit T auf einer Ellipse mit der großen Halbachse a gleich der Umlaufzeit auf einem Kreis mit dem Radius a. (siehe 2.1.).

$$\#E1: U = 2\pi * a \quad | U = \text{Umfang}$$

$$\#E2: v = \frac{U}{T} \quad | v = \text{Bahngeschwindigkeit; } T = \text{Umlaufzeit}$$

$$\#E3: F_Z = -m * \omega^2 * a \quad | F_Z = \text{Zentripetalkraft auf der Kreisbahn}$$

$$| \omega = \text{Winkelgeschwindigkeit}$$

$$\#E4: F_Z = -m * \frac{v^2}{a}$$

$$\#E5: F_Z = -G * m * M * \frac{1}{a^2} \quad | G = \text{Gravitationskonstante}$$

| das '-' in den Gleichungen 3) und 4) kommt daher, dass die Zentripetalkraft dem Radiusvektor entgegengerichtet ist

$$\#E4 = \#E5 \rightarrow \#E6: v^2 = G * M * \frac{1}{a}$$

$$\#E7: v = \sqrt{G * M * \frac{1}{a}}$$

$$\#E1 \text{ in } \#E2 \rightarrow \#E8: v = \frac{2 * \pi * a}{T}$$

$$\#E9: T = \frac{2 * \pi * a}{v}$$

$$\#E7 \text{ in } \#E9 \rightarrow \#E10: T = \frac{2 * \pi * a}{\sqrt{G * \frac{M}{a}}}$$

$$\#E11: \frac{2 * \pi}{T} * t = \psi - \varepsilon * \sin \psi \quad | \text{ siehe \#E2.2.8}$$

$$| \varepsilon \text{ ist Exzentrizität } (\varepsilon = \frac{e}{a})$$



$$\#E12: t = \frac{T}{2 * \pi} * (\psi - \varepsilon * \sin \psi)$$

$$\#E13: r = a * (1 - \varepsilon * \cos \psi) \quad | \text{ siehe \#E2.2.29}$$

$$\#E14: r = a - \varepsilon * a * \cos \psi$$

$$\#E15: \varepsilon * a * \cos \psi = a - r$$

$$\#E16: \cos \psi = \frac{a - r}{\varepsilon * a}$$

$$\#E17: \psi = \arccos\left(\frac{a - r}{\varepsilon * a}\right)$$

$$\#E17 \text{ in } \#E12 \rightarrow \#E18: t = \frac{T}{2 * \pi} * \left[ \arccos\left(\frac{a - r}{\varepsilon * a}\right) - \varepsilon * \sin\left(\arccos\left(\frac{a - r}{\varepsilon * a}\right)\right) \right]$$

da

$$\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1 \rightarrow \sin y = \sqrt{1 - \cos^2(y)}$$

folgt

$$\#E19: t = \frac{T}{2 * \pi} * \left[ \arccos\left(\frac{a - r}{\varepsilon * a}\right) - \varepsilon * \sqrt{1 - \left(\frac{a - r}{\varepsilon * a}\right)^2} \right]$$

in diesem Spezialfall ist  $\varepsilon = 1$ :

$$\#E20: t = \frac{T}{2 * \pi} * \left[ \arccos\left(\frac{a - r}{a}\right) - \sqrt{1 - \left(\frac{a - r}{a}\right)^2} \right]$$

Untersuchung von  $t(r)$ :

$$t(0) = 0$$

$$t(d) = t(2a) = \frac{T}{2}$$

Der Definitionsbereich für  $r$  ist  $D = \{0..2a\}$ .

minimaler Funktionswert: bei 0

maximaler Funktionswert: bei  $2a$  | da  $t(r)$  streng monoton steigend ist

Gesucht war aber  $t'(r)$ , welches die Fallzeit vom Aphel ( $d=2a$ ) bis zur Entfernung  $r$  liefert. Dies ist aber nichts weiter als die Differenz von  $t(2a)$  und  $t(r)$ .

Da  $t'(r)$  positiv sein soll und für jedes  $t(r)$  aus dem Definitionsbereich  $t(r) \leq t(2a)$  gilt, folgt:

$$\text{\#E21: } t' = \frac{T}{2} - \frac{T}{2 * \pi} * \left[ \arccos\left(\frac{a-r}{a}\right) - \sqrt{1 - \left(\frac{a-r}{a}\right)^2} \right]$$

$$\text{\#E22: } t' = \frac{T}{2 * \pi} * \left[ \pi - \arccos\left(\frac{a-r}{a}\right) + \sqrt{1 - \left(\frac{a-r}{a}\right)^2} \right]$$

$$\text{\#E10 in \#E22 à \#E23: } t' = \frac{a}{\sqrt{\frac{G * M}{a}}} * \left[ \pi - \arccos\left(\frac{a-r}{a}\right) + \sqrt{1 - \left(\frac{a-r}{a}\right)^2} \right]$$

da  $d=2a$  folgt

$$\text{\#E24: } t' = \frac{d}{2 * \sqrt{\frac{2 * G * M}{d}}} * \left[ \pi - \arccos\left(\frac{d-2*r}{d}\right) + \sqrt{1 - \left(\frac{d-2*r}{d}\right)^2} \right]$$

(M und d sind Formvariablen)

Diese Gleichung liefert uns die Zeit  $t'$ , die der Körper braucht, um zu  $r$  zu gelangen.

Der Definitionsbereich für  $r$  ist  $D = \{0..d\}$ .

Um umgekehrt  $r(t')$  zu erhalten, setzt man  $t'$  in #E24 ein und löst die Gleichung numerisch (im Intervall von 0 bis  $d$ ).

In 7.2.2. ist ein Graph der Funktion #E24 abgebildet.

### 2.3.2. Weg-Zeit-Gleichung (Ruhelage) mittels Differentialgleichungen

Hier versuchen wir, wie in 2.3.1. eine Weg-Zeit-Gleichung zu erhalten. Allerdings benutzen wir dabei nicht die Keplergleichung, sondern Differentialgleichungen. Es gelten die gleichen Anfangsbedingungen wie in 2.3.1.

Auf den Körper wirkt die Gravitationskraft:

$$\text{\#E1: } F = m * a$$

$$\text{\#E2: } F = m * \frac{d^2 r}{dt^2}$$

$$\text{\#E3: } F = m * \ddot{r}$$

aber auch:

$$\#E4: F = -G * m * M * \frac{1}{r^2}$$

| G = Gravitationskonstante

| das '-' in der Gleichungen 2) kommt daher, dass die Zentripetalkraft dem Radiusvektor entgegengerichtet ist

$$\#E3 = \#E4 \rightarrow \#E5: m * \ddot{r} = -G * m * M * \frac{1}{r^2}$$

$$\#E6: \ddot{r} = -G * M * \frac{1}{r^2}$$

$$\#E7: \dot{r} * \ddot{r} = -G * M * \frac{1}{r^2} * \dot{r}$$

jetzt integrieren wir auf beiden Seiten nach der Zeit:

$$\#E8: \frac{1}{2} * \dot{r}^2 = \frac{G * M}{r} + C$$

| um diesen Schritt zu überprüfen, einfach

wieder differenzieren (links mit Produktregel, rechts mit Quotientenregel)

Wir wählen  $C = -\frac{G * M}{d}$ , da so  $v(= \dot{r})$  bei  $r = d$  den Wert 0 annimmt:  
(siehe Anfangsbedingungen)

$$\#E9: \frac{1}{2} * \dot{r}^2 = \frac{G * M}{r} - \frac{G * M}{d}$$

$$\#E10: \dot{r}^2 = 2 * G * M * \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d} \right)$$

$$\#E11: \dot{r} = \pm \sqrt{2 * G * M * \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d} \right)}$$

Wir wählen  $-\sqrt{\quad}$ , da  $v(= \dot{r}) \leq 0$  sein muss, da  $v$  auf  $M$  zu gerichtet ist:

$$\#E12: \dot{r} = -\sqrt{2 * G * M * \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d} \right)}$$

$$\#E13: -\frac{\dot{r}}{\sqrt{2 * G * M * \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d} \right)}} = 1$$

Substitution  $x = \frac{r}{d}$ :

$$\text{\#E14: } -\frac{1}{\sqrt{2 * G * M * \left(\frac{1}{xd} - \frac{1}{d}\right)}} * \dot{x} * d = 1$$

Substitution  $k = \sqrt{\frac{d^3}{2 * G * M}}$ :

$$\text{\#E15: } -k * \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} - 1}} * \dot{x} = 1$$

Jetzt integrieren wir noch mal nach der Zeit:

$$\text{\#E16: } -k * \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} - 1}} * \dot{x} * dt = \int 1 * dt$$

Mit Hilfe der Substitutionsregel für Integrale schreiben wir jetzt:

$$\text{\#E17: } -k * \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} - 1}} * \dot{x} * \frac{dt}{dx} * dx = \int 1 * dt$$

da  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  und da laut Kettenregel gilt  $\frac{da}{db} = \frac{da}{dc} * \frac{dc}{db}$  folgt  $\dot{x} * \frac{dt}{dx} = \frac{dx}{dt} * \frac{dt}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$

also:

$$\text{\#E18: } -k * \left[ \frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1\right)} - x * \sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1\right)} \right] = t + D \quad | \text{ siehe Integraltabelle}$$

bei  $t = 0$  und  $x = 1$  ist  $D = -k * \frac{\pi}{2}$ :

(so ist der Körper bei  $t = 0$  in der Entfernung d)

$$\text{\#E19: } t = -k * \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1\right)} - x * \sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1\right)} \right]$$

$$\text{\#E20: } t = k * \left[ \arctan \sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1\right)} + x * \sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1\right)} \right]$$

Zurücksubstituieren:

$$\#E21: t = \sqrt{\frac{d^3}{2 * G * M}} * \left[ \arctan \sqrt{\left(\frac{d}{r} - 1\right)} + \frac{r}{d} * \sqrt{\left(\frac{d}{r} - 1\right)} \right]$$

Der Definitionsbereich für  $r$  ist  $D = \{0..d\}$ .

Da #E21 offensichtlich anders aussieht als #E2.3.1.24, obwohl beide das gleiche beschreiben sollen, müssen wir noch zeigen, dass wir sie in einander überführen können. Dies geschieht in 7.1.4.

In 7.2.3. wird ein Zahlenbeispiel zur Funktion #E21 gerechnet.

### 2.3.3. Weg-Zeit-Gleichung mittels Differentialgleichungen

Hier versuchen wir, wie in 2.3.2. eine Weg-Zeit-Gleichung mittels Differentialgleichungen zu erhalten. Allerdings ist diesmal die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  beliebig.

( $M$  ist die Zentralmasse,  
die Anfangsentfernung ist  $d$ ,  
 $v_0$  ist entweder direkt auf  $M$  zu- oder direkt von  $M$  weggerichtet,  
 $r$  ist die Entfernung eines Punktes der Ellipse von  $M$ )

auf den Körper wirkt die Gravitationskraft:

$$\#E1: F = m * a$$

$$\#E2: F = m * \frac{d^2 r}{dt^2}$$

$$\#E3: F = m * \ddot{r}$$

aber auch:

$$\#E4: F = -G * m * M * \frac{1}{r^2}$$

|  $G$  = Gravitationskonstante

| das '-' in der Gleichungen 2) kommt daher, dass die Zentripetalkraft dem Radiusvektor entgegengerichtet ist

$$\#E3 = \#E4 \rightarrow \#E5: m * \ddot{r} = -G * m * M * \frac{1}{r^2}$$

$$\#E6: m \cdot \dot{r} \cdot \ddot{r} = -G \cdot m \cdot M \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \dot{r}$$

Jetzt integrieren wir auf beiden Seiten nach der Zeit:

$$\#E7: \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{r}^2 = \frac{G \cdot m \cdot M}{r} + C \quad \left| \begin{array}{l} \text{um diesen Schritt zu überprüfen, einfach} \\ \text{wieder differenzieren (links mit Produktregel,} \\ \text{rechts mit Quotientenregel)} \end{array} \right.$$

Für  $r = d$  muss  $\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{r}^2$  zu  $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$  werden, da dies die kinetische Energie in diesem Punkt ist (aufgrund der Anfangsbedingungen):

$$\#E8: \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{G \cdot m \cdot M}{d} + C$$

$$\#E9: C = -\frac{G \cdot m \cdot M}{d} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$$

$$\#E9 \text{ in } \#E7 \rightarrow \#E10: \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{r}^2 = \frac{G \cdot m \cdot M}{r} - \frac{G \cdot m \cdot M}{d} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$$

$$\#E11: \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{r}^2 = G \cdot m \cdot M \cdot \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d} \right) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$$

$$\#E12: \frac{1}{2} \cdot \dot{r}^2 = G \cdot M \cdot \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d} \right) + \frac{1}{2} \cdot v_0^2$$

$$\#E13: \dot{r}^2 = 2 \cdot G \cdot M \cdot \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d} \right) + v_0^2$$

$$\#E14: \dot{r} = \pm \sqrt{2 \cdot G \cdot M \cdot \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d} \right) + v_0^2}$$

Wie bereits oben gesagt, ist  $r$  am Anfang gleich dem Abstand  $d$ . Damit haben wir gewählt, dass  $r$  am Anfang positiv ist. Wenn wir also annehmen,  $v_0$  sei auf  $M$  zu gerichtet, dann wählen wir  $-\sqrt{\quad}$ , da der Abstandsvektor  $r$  kleiner wird und somit seine Ableitung  $\dot{r}$  negativ ist:

$$\#E15: \dot{r} = -\sqrt{2 \cdot G \cdot M \cdot \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d} \right) + v_0^2}$$

$$\text{\#E16: } -\frac{\dot{r}}{\sqrt{2 * G * M * \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d}\right) + v_0^2}} = 1$$

Substitution  $x = \frac{r}{d}$ :

$$\text{\#E17: } -\frac{1}{\sqrt{2 * G * M * \left(\frac{1}{x * d} - \frac{1}{d}\right) + v_0^2}} * \dot{x} * d = 1$$

$$\text{\#E18: } -d * \sqrt{\frac{d}{2 * G * M}} * \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} - 1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}}} * \dot{x} = 1$$

$$\text{\#E19: } -\sqrt{\frac{d^3}{2 * G * M}} * \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} - 1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}}} * \dot{x} = 1$$

Substitution  $k = \sqrt{\frac{d^3}{2 * G * M}}$ :

$$\text{\#E20: } -k * \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} - 1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}}} * \dot{x} = 1$$

Substitution  $y = -1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}$ :

$$\text{\#E21: } -k * \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} + y}} * \dot{x} = 1$$

Jetzt integrieren wir noch mal nach der Zeit:

$$\text{\#E22: } -k * \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} + y}} * \dot{x} * dt = \int 1 * dt$$

Mit Hilfe der Substitutionsregel für Integrale schreiben wir jetzt:

$$\#E23: -k \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} + y}} \cdot \dot{x} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot dx = \int 1 \cdot dt$$

da  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  und da laut Kettenregel gilt  $\frac{da}{db} = \frac{da}{dc} \cdot \frac{dc}{db}$  folgt  $\dot{x} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$

also:

#E24:

$$- \frac{k \cdot \sqrt{\frac{1+y \cdot x}{x}} \cdot x \cdot \left( 2 \cdot \sqrt{(1+y \cdot x) \cdot x} \cdot \sqrt{y} - \ln \left( \frac{1+2 \cdot y \cdot x + 2 \cdot \sqrt{(1+y \cdot x) \cdot x} \cdot \sqrt{y}}{2 \cdot \sqrt{y}} \right) \right)}{2 \cdot \sqrt{(1+y \cdot x) \cdot x} \cdot y^{3/2}} = t + F$$

(siehe Integraltabelle)

bei  $t = 0$  muss  $x = 1$  sein, da dort  $r = d$  ist und da  $x = \frac{r}{d}$  gilt, folgt:

$$\#E25: F = - \frac{k \cdot \left( 2 \cdot \sqrt{1+y} \cdot \sqrt{y} - \ln \left( \frac{1+2 \cdot y + 2 \cdot \sqrt{1+y} \cdot \sqrt{y}}{2 \cdot \sqrt{y}} \right) \right)}{2 \cdot y^{3/2}}$$

daraus folgt:

#E25 in #E24 à #E26:

$$t = - \frac{k \cdot \sqrt{\frac{1+y \cdot x}{x}} \cdot x \cdot \left( 2 \cdot \sqrt{(1+y \cdot x) \cdot x} \cdot \sqrt{y} - \ln \left( \frac{1+2 \cdot y \cdot x + 2 \cdot \sqrt{(1+y \cdot x) \cdot x} \cdot \sqrt{y}}{2 \cdot \sqrt{y}} \right) \right)}{2 \cdot \sqrt{(1+y \cdot x) \cdot x} \cdot y^{3/2}} + \frac{k \cdot \left( 2 \cdot \sqrt{1+y} \cdot \sqrt{y} - \ln \left( \frac{1+2 \cdot y + 2 \cdot \sqrt{1+y} \cdot \sqrt{y}}{2 \cdot \sqrt{y}} \right) \right)}{2 \cdot y^{3/2}}$$

#E27:

$$t = -k \cdot \sqrt{\frac{1+y \cdot x}{x}} \cdot x \cdot \left( \frac{2 \cdot \sqrt{(1+y \cdot x) \cdot x} \cdot \sqrt{y}}{2 \cdot \sqrt{(1+y \cdot x) \cdot x} \cdot y^{3/2}} - \frac{\ln \left( \frac{1+2 \cdot y \cdot x + 2 \cdot \sqrt{(1+y \cdot x) \cdot x} \cdot \sqrt{y}}{2 \cdot \sqrt{y}} \right)}{2 \cdot \sqrt{(1+y \cdot x) \cdot x} \cdot y^{3/2}} \right) + \frac{k \cdot \left( 2 \cdot \sqrt{1+y} \cdot \sqrt{y} - \ln \left( \frac{1+2 \cdot y + 2 \cdot \sqrt{1+y} \cdot \sqrt{y}}{2 \cdot \sqrt{y}} \right) \right)}{2 \cdot y^{3/2}}$$



#E28:

$$t = -k * \sqrt{\frac{1+y*x}{x}} * x * \left( \frac{1}{y} - \frac{\ln\left(\frac{1+2*y*x+2*\sqrt{(1+y*x)*x*\sqrt{y}}}{2*\sqrt{y}}\right)}{2*\sqrt{(1+y*x)*x*y^{3/2}}} \right)$$

$$+ \frac{k * \left( 2*\sqrt{1+y}*\sqrt{y} - \ln\left(\frac{1+2*y+2*\sqrt{1+y}*\sqrt{y}}{2*\sqrt{y}}\right) \right)}{2*y^{3/2}}$$

#E29:

$$t = -k * \sqrt{\frac{1+y*x}{x}} * x * \left( \frac{1}{y} - \frac{\ln\left(\frac{1+2*y*x+2*\sqrt{(1+y*x)*x*\sqrt{y}}}{2*\sqrt{y}}\right)}{2*\sqrt{(1+y*x)*x*y^{3/2}}} \right)$$

$$+ \frac{k * 2*\sqrt{1+y}*\sqrt{y}}{2*y^{3/2}} - \frac{k * \ln\left(\frac{1+2*y+2*\sqrt{1+y}*\sqrt{y}}{2*\sqrt{y}}\right)}{2*y^{3/2}}$$

Zurücksubstituieren:

#E30:

$$\begin{aligned}
 t = & -\sqrt{\frac{d^3}{2 * G * M}} * \sqrt{\frac{1 + \left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right) * \frac{r}{d}}{\frac{r}{d}} * \frac{r}{d}} \\
 & * \left( \frac{1}{\left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right)} - \frac{\ln \left( \frac{1 + 2 * \left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right) * \frac{r}{d} + 2 * \sqrt{1 + \left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right) * \frac{r}{d}} * \frac{r}{d} * \sqrt{-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}}}{2 * \sqrt{-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}}} \right)}{2 * \sqrt{1 + \left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right) * \frac{r}{d}} * \frac{r}{d} * \left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right)^{3/2}} \right) \\
 & + \frac{\sqrt{\frac{d^3}{2 * G * M}} * 2 * \sqrt{1 + \left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right) * \frac{r}{d}} * \sqrt{-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}}}{2 * \left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right)^{3/2}} \\
 & - \frac{\sqrt{\frac{d^3}{2 * G * M}} * \ln \left( \frac{1 + 2 * \left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right) + 2 * \sqrt{1 + \left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right) * \frac{r}{d}} * \sqrt{-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}}}{2 * \sqrt{-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}}} \right)}{2 * \left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

#E31:

$$\begin{aligned}
 t = & -\sqrt{\frac{d^3}{2*G*M}} * \sqrt{\left(\frac{d}{r} - 1 + \frac{d*v_0^2}{2*G*M}\right) * \frac{r}{d}} \\
 & * \left( \frac{1}{\left(-1 + \frac{d*v_0^2}{2*G*M}\right)} - \frac{\ln\left(\frac{1 + 2*\left(-1 + \frac{d*v_0^2}{2*G*M}\right) * \frac{r}{d} + 2*\sqrt{\left(1 + \left(-1 + \frac{d*v_0^2}{2*G*M}\right) * \frac{r}{d}\right) * \frac{r}{d}} * \sqrt{\left(-1 + \frac{d*v_0^2}{2*G*M}\right)}}{2*\sqrt{\left(-1 + \frac{d*v_0^2}{2*G*M}\right)}} \right)}{\left(-1 + \frac{d*v_0^2}{2*G*M}\right) * 2*\sqrt{\left(1 + \left(-1 + \frac{d*v_0^2}{2*G*M}\right) * \frac{r}{d}\right) * \frac{r}{d}} * \left(-1 + \frac{d*v_0^2}{2*G*M}\right)^{3/2}} \right) \\
 & + \frac{\sqrt{\frac{d^3}{2*G*M}} * 2*\sqrt{\left(\frac{d*v_0^2}{2*G*M}\right) * \sqrt{\left(-1 + \frac{d*v_0^2}{2*G*M}\right)}}}{2*\left(-1 + \frac{d*v_0^2}{2*G*M}\right)^{3/2}} \\
 & - \frac{\sqrt{\frac{d^3}{2*G*M}} * \ln\left(\frac{\left(-1 + \frac{d*v_0^2}{G*M}\right) + 2*\sqrt{\left(\frac{d*v_0^2}{2*G*M}\right) * \sqrt{\left(-1 + \frac{d*v_0^2}{2*G*M}\right)}}}{2*\sqrt{\left(-1 + \frac{d*v_0^2}{2*G*M}\right)}}\right)}{2*\left(-1 + \frac{d*v_0^2}{2*G*M}\right)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

Der Definitionsbereich (für das Fallen zur Zentralmasse hin) für  $r$  geht von 0 bis  $d$ .

Wenn wir annehmen,  $v_0$  sei von  $M$  weg gerichtet, dann wählen wir nach Gleichung #E14  $+\sqrt{\quad}$ , da dann  $v(=\dot{r}) \geq 0$  ist. Die Schritte #E15 bis #E31 führen wir dann entsprechend aus und erhalten:

#E31\* (-1) à #E32:

$$t = \sqrt{\frac{d^3}{2 * G * M}} * \sqrt{\left(\frac{d}{r} - 1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right) * \frac{r}{d}}$$

$$* \left( \frac{1}{\left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right)} - \frac{\ln \left( \frac{1 + 2 * \left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right) * \frac{r}{d} + 2 * \sqrt{\left(1 + \left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right) * \frac{r}{d}\right) * \frac{r}{d} * \left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right)}\right)}{2 * \sqrt{\left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right)}} \right)$$

$$- \frac{\sqrt{\frac{d^3}{2 * G * M}} * 2 * \sqrt{\left(\frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right) * \left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right)}}{2 * \left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right)^{3/2}}$$

$$+ \frac{\sqrt{\frac{d^3}{2 * G * M}} * \ln \left( \frac{\left(-1 + \frac{d * v_0^2}{G * M}\right) + 2 * \sqrt{\left(\frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right) * \left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right)}}{2 * \sqrt{\left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right)}} \right)}{2 * \left(-1 + \frac{d * v_0^2}{2 * G * M}\right)^{3/2}}$$

Der Definitionsbereich (für den Flug von der Zentralmasse weg) für  $r$  geht von  $d$  bis zu dem durch die Gesamtenergie gegebenen Maximalwert.

In 7.2.4. sind einige Graphen zu diesem Spezialfall abgebildet und in 7.2.5. wird hierzu ein Zahlenbeispiel gerechnet.

### 3. Das Zweikörperproblem

Nachdem wir uns in Kapitel 2 schon mit einem eingeschränkten Spezialfall des Zweikörperproblems beschäftigt haben, wollen wir es hier nun allgemein betrachten:

#### 3.1. Beweis, dass sich zwei Körper immer in einer Ebene bewegen

Der folgende Beweis zeigt, dass sich 2 Körper immer in einer Ebene bewegen:  
Der Schwerpunkt S bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_S$ .

Wir erhalten  $\vec{v}_S$ , indem wir die Impulsvektoren  $\vec{p}_1 = m_1 * \vec{v}_1$  und  $\vec{p}_2 = m_2 * \vec{v}_2$  addieren und durch die Systemmasse  $m_S = m_1 + m_2$  dividieren:

$$\text{\#E1: } \vec{v}_S = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{m_S}$$

$$\text{\#E2: } \vec{v}_S = \frac{m_1 * \vec{v}_1 + m_2 * \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\text{\#E3: } \vec{v}_S = \frac{m_1}{m_1 + m_2} * \vec{v}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} * \vec{v}_2$$

Nun wählen wir als Bezugssystem jenes, in welchem S in Ruhe ist. Die alten Geschwindigkeitsvektoren  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  werden in die neuen Vektoren  $\vec{v}_1'$  und  $\vec{v}_2'$  übergeführt. Dazu subtrahieren wir  $\vec{v}_S$ :

$$\text{\#E4: } \vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_S$$

$$\text{\#E5: } \vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} * \vec{v}_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} * \vec{v}_2$$

$$\text{\#E6: } \vec{v}_1' = \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) * \vec{v}_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} * \vec{v}_2$$

$$\text{\#E7: } \vec{v}_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} * \vec{v}_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} * \vec{v}_2$$

$$\text{\#E8: } \vec{v}_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} * (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

entsprechend:

$$\text{\#E9: } \vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_S$$

$$\text{\#E10: } \vec{v}_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} * (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\text{\#E11: } \vec{v}_2' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} * (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

$\vec{v}_1'$  und  $\vec{v}_2'$  sind linear abhängig, da gilt:

$$\#E12: \vec{v}_1' = -\frac{m_2}{m_1} * \vec{v}_2'$$

$\vec{v}_1'$  (der von  $m_1$  ausgeht) spannt zusammen mit dem Richtungsvektor  $\vec{r}$ , der von  $m_1$  zu  $m_2$  geht, eine Ebene auf (außer wenn  $\vec{v}_1'$  und  $\vec{r}$  auch linear abhängig sind, aber dann verläuft die Bewegung sogar innerhalb einer Geraden). Der Stützvektor der Ebene ist der Vektor vom Ursprung zu  $m_1$ .

$\vec{v}_2'$  (der von  $m_2$  ausgeht) liegt natürlich auch in dieser Ebene, da er und  $\vec{v}_1'$  linear abhängig sind (und da 2 Geraden mit linear abhängigen Richtungsvektoren immer parallel sind und damit stets in einer Ebene liegen).

Da keiner der Geschwindigkeitsvektoren aus der Ebene heraus zeigt und auch die Gravitationskräfte nur innerhalb der Ebene wirken (da sie entlang des Vektors  $\vec{r}$  wirken), findet somit der gesamte Bewegungsvorgang innerhalb dieser Ebene statt.

### 3.2. Bewegung zweier Körper

Im Folgenden wollen wir die Bewegung zweier vergleichbar großer Massen unter dem Einfluss der Gravitation betrachten:  
(Dies erfolgt in Anlehnung an #Q5.)

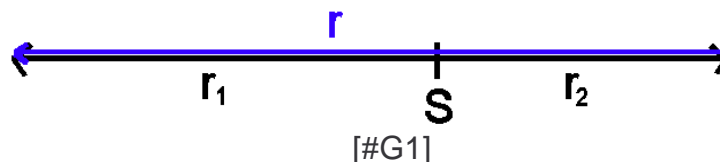
Gegeben sind die Massen  $m_1$  und  $m_2$  der beiden Körper sowie ihre Radiusvektoren zum Zeitpunkt  $t_0$ :  $\vec{r}_1(t_0)$  und  $\vec{r}_2(t_0)$

Weiterhin ist einer der Geschwindigkeitsvektoren gegeben:  $\vec{v}_1(t_0)$

(Wir betrachten das Bezugssystem, in welchem sich der Schwerpunkt S des Systems in Ruhe befindet. S liegt im Ursprung des Koordinatensystems.)

Wir definieren:

$$\#E1: \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad | \quad r \text{ ist der Abstand der beiden Massen}$$



Auf die Körper wirken folgende Kräfte:

$$\#E2: \vec{F}_1 = m_1 * \vec{a}_1 = m_1 * \ddot{\vec{r}}_1 = -G * m_1 * m_2 * \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad | \quad \text{wirkt auf } m_1$$

$$\#E3: \vec{F}_2 = m_2 * \vec{a}_2 = m_2 * \ddot{\vec{r}}_2 = +G * m_1 * m_2 * \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad | \quad \text{wirkt auf } m_2$$

| das + kommt daher, dass  $\vec{F}_1$  und  $\vec{F}_2$

| entgegengesetzt gerichtet sind

Die entsprechenden Beschleunigungen sind:

$$\#E4: \ddot{\vec{r}}_1 = -G * m_2 * \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

und

$$\#E5: \ddot{\vec{r}}_2 = G * m_1 * \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Wir leiten #E1 zweimal nach der Zeit ab:

$$\#E6: \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{dt^2}$$

$$\#E7: \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2$$

$$\#E4 \text{ und } \#E5 \text{ in } \#E7 \rightarrow \#E8: \ddot{\vec{r}} = -G * m_2 * \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} - G * m_1 * \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$\#E9: \ddot{\vec{r}} = -G * (m_1 + m_2) * \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Jetzt multiplizieren wir beide Seiten mit der reduzierten Masse  $\mu$  :

$$\#E10: \mu * \ddot{\vec{r}} = -G * \mu * (m_1 + m_2) * \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Dies ist die Bewegungsgleichung für eine fiktive Masse  $\mu$  , welche den Abstand  $r$  zur Zentralmasse  $(m_1 + m_2)$  hat. Ihre Bahn ist eine Ellipse (wie aus 2.1. folgt). Somit wurde das Zweikörperproblem auf ein Einkörperproblem zurückgeführt.

┌  
Einschub 1:



Das Produkt aus Masse und Betrag des Radiusvektors ist konstant. (Aufgrund der Definition des Schwerpunkts.)

also:

$$\#E11: m_1 * |\vec{r}_1| = m_2 * |\vec{r}_2|$$

und unter Berücksichtigung der Richtung der Vektoren:

$$\#E12: m_1 * \vec{r}_1 = -m_2 * \vec{r}_2$$

$$\#E13: \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2} * \vec{r}_1$$

$$\#E13 \text{ in } \#E1 \rightarrow \#E14: \vec{r} = \vec{r}_1 + \frac{m_1}{m_2} * \vec{r}_1$$

$$\#E15: \vec{r}_1 * \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = \vec{r}$$

$$\#E16: \vec{r}_1 * \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right) = \vec{r}$$

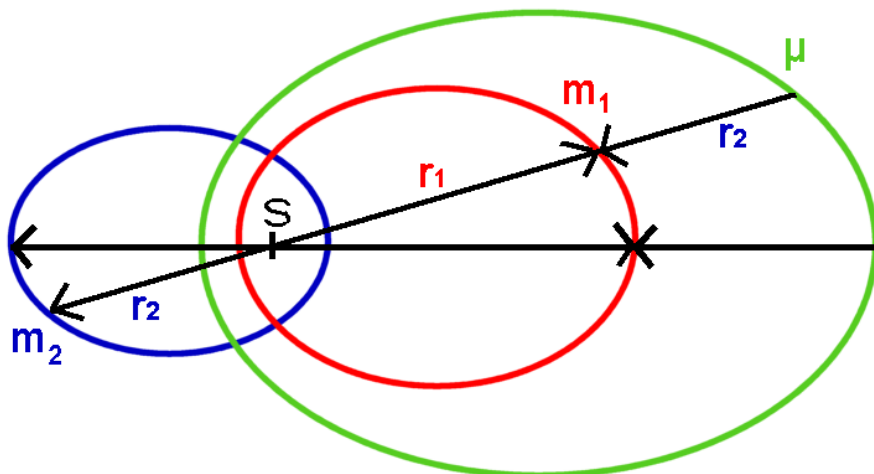
$$\#E17: \vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} * \vec{r}$$

und entsprechend:

$$\#E18: \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} * \vec{r}$$

L

Laut #E17 und #E18 sind auch die Bahnen der Massen  $m_1$  und  $m_2$  Ellipsen, da  $\vec{r}$  jeweils nur mit einem Skalar multipliziert wird. (siehe #G3)





[#G3]

Ihre numerischen Exzentrizitäten  $\varepsilon$  stimmen mit der der  $\mu$ -Ellipse überein.  
Für die großen Halbachsen gilt nach Einschub 1:

$$\text{\#E19: } a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} * a$$

und

$$\text{\#E20: } a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} * a \quad \left| \begin{array}{l} \text{das '}' \text{ entfällt hier, da es sich nicht um} \\ \text{einen Vektor handelt} \end{array} \right.$$

┐  
Einschub 2: (Berechnung von  $a$  und  $\varepsilon$ )

es gilt:

$$\text{\#E21: } \vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt}$$

$$\text{\#E17 in \#E21 à \#E22: } \vec{v}_1 = \frac{d\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} * \vec{r}\right)}{dt}$$

$$\text{\#E23: } \vec{v}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} * \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\text{\#E24: } \vec{v}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} * \vec{v}_\mu$$

$$\text{\#E25: } \vec{v}_\mu = \frac{m_1 + m_2}{m_2} * \vec{v}_1$$

und als Beträge:

$$\text{\#E26: } v_\mu = \frac{m_1 + m_2}{m_2} * v_1 \quad \left| \begin{array}{l} v_\mu = |\vec{v}_\mu| \\ v_1 = |\vec{v}_1| \end{array} \right.$$

Laut #E7.1.3.7 gilt:

$$\text{\#E27: } a = \frac{G * M * r}{2 * G * M - v^2 * r}$$

also hier:

$$\#E28: a_\mu = \frac{G * (m_1 + m_2) * r}{2 * G * (m_1 + m_2) - v_\mu^2 * r}$$

mit Beträgen lautet #E1 laut #G1:

$$\begin{aligned} \#E29: r &= r_1 + r_2 & | \quad r &= |\vec{r}| \\ & & | \quad r_1 &= |\vec{r}_1| \\ & & | \quad r_2 &= |\vec{r}_2| \end{aligned}$$

#E26 und #E29 in #E28 à

$$\#E30: a_\mu = \frac{G * (m_1 + m_2) * (r_1 + r_2)}{2 * G * (m_1 + m_2) - \left( \frac{m_1 + m_2}{m_2} * v_1 \right)^2 * (r_1 + r_2)}$$

$$\#E31: a_\mu = \frac{G * (m_1 + m_2) * (r_1 + r_2)}{2 * G * (m_1 + m_2) - v_1^2 * \frac{(m_1 + m_2)^2 * (r_1 + r_2)}{m_2^2}}$$

$$\#E32: a_\mu = \frac{G * (r_1 + r_2)}{2 * G - v_1^2 * \frac{(m_1 + m_2) * (r_1 + r_2)}{m_2^2}}$$

$$\#E33: a_\mu = \frac{G * m_2^2 * (r_1 + r_2)}{2 * G * m_2^2 - v_1^2 * (m_1 + m_2) * (r_1 + r_2)}$$

Damit ist  $a_\mu$  mit Hilfe von  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $r_1(t_0) = |\vec{r}_1(t_0)|$ ,  $r_2(t_0) = |\vec{r}_2(t_0)|$  und  $v_1(t_0) = |\vec{v}_1(t_0)|$  berechenbar. Und mit den Gleichungen #E19 und #E20 sind somit auch  $a_1$  und  $a_2$  bekannt.

Laut #E7.1.3.13 gilt:

$$\#E34: e = \sqrt{a^2 + \left( \frac{r^2}{2} - a * r \right) * (1 - \cos(2 * \alpha))}$$

also hier:

$$\#E35: e_\mu = \sqrt{a_\mu^2 + \left( \frac{r^2}{2} - a_\mu * r \right) * (1 - \cos(2 * \alpha))}$$

wegen  $\varepsilon = \frac{e}{a}$  folgt:

$$\#E36: \varepsilon = \sqrt{1 + \left( \frac{r^2}{2 \cdot a_\mu^2} - \frac{r}{a_\mu} \right) \cdot (1 - \cos(2 \cdot \alpha))}$$

#E17 [Beträge] und #E19 in #E36 à

$$\#E37: \varepsilon = \sqrt{1 + \left( \frac{r_1^2}{2 \cdot a_1^2} - \frac{r_1}{a_1} \right) \cdot (1 - \cos(2 \cdot \alpha))}$$

Wobei  $\alpha$  der Winkel zwischen  $\vec{r}$  und  $\vec{v}_\mu$  (bzw.  $\pi$  minus dieser Winkel), also auch der Winkel zwischen  $\vec{r}_1$  und  $\vec{v}_1$  (bzw.  $\pi$  minus dieser Winkel), ist. (Zur Erläuterung dient #G7.1.3.1.)

Somit ist auch  $\varepsilon$  berechenbar.

L

Nun haben wir alles, was wir zur Berechnung der Position von  $m_1$  und  $m_2$  zu einem bestimmten Zeitpunkt brauchen. Um dies zu tun, gehen wir entsprechend 2.2. vor.

### 3.3. Spezialfälle (eindimensional)

In den folgenden Unterkapiteln werden wir einige interessante Spezialfälle betrachten. Bei diesen Spezialfällen findet der gesamte Bewegungsvorgang in einer Dimension (innerhalb einer Geraden) statt. Die Herleitung erfolgt mittels Differentialgleichungen. (Wie schon in 1.1. erwähnt, werden im Folgenden keine Vektorpfeile benutzt, da es sich nur um eindimensionale Vektoren handelt.)

#### 3.3.1. Weg-Zeit-Gleichung (Ruhelage) mittels Differentialgleichungen

Dieser Spezialfall beschreibt den Fall zweier Massepunkte aufeinander zu (keine der beiden Massen ist relativ zur anderen vernachlässigbar klein), wobei berücksichtigt wird, dass sich die Beschleunigung während des Falls ändert. Um eine Weg-Zeit-Gleichung zu erhalten, benutzen wir Differentialgleichungen.

Wir betrachten das Bezugssystem, in welchem sich der Schwerpunkt des Systems in Ruhe befindet. Die Anfangsentfernung der beiden Körper zueinander sei  $d$ . Bei diesem Spezialfall gehen wir weiterhin davon aus, dass keiner der Körper (in dem gewählten Bezugssystem) eine Anfangsgeschwindigkeit besitzt.

Zur Masse  $m_1$  gehört der Radiusvektor  $r_1$ , zur Masse  $m_2$  gehört der Radiusvektor  $r_2$  (siehe #G3.2.1).

es gilt:

$$\#E1: r = r_1 - r_2$$

|  $r$  ist der Abstand der beiden Massen

auf die Körper wirken folgende Kräfte:

$$\#E2: F_1 = -G * m_1 * m_2 * \frac{1}{r^2}$$

| wirkt auf  $m_1$

$$\#E3: F_2 = +G * m_1 * m_2 * \frac{1}{r^2}$$

| wirkt auf  $m_2$

das + kommt daher, dass  $F_1$  und  $F_2$  entgegengesetzt gerichtet sind

da gilt:

$$\#E4: F_1 = m_1 * \ddot{r}_1$$

und

$$\#E5: F_2 = m_2 * \ddot{r}_2$$

sind die entsprechenden Beschleunigungen:

$$\#E6: \ddot{r}_1 = -G * m_2 * \frac{1}{r^2}$$

und

$$\#E7: \ddot{r}_2 = G * m_1 * \frac{1}{r^2}$$

jetzt leiten wir #E1 zweimal nach der Zeit ab:

$$\#E8: \ddot{r} = \frac{d^2(r_1 - r_2)}{dt^2}$$

$$\#E9: \ddot{r} = \ddot{r}_1 - \ddot{r}_2$$

$$\#E6 \text{ und } \#E7 \text{ in } \#E9 \rightarrow \#E10: \ddot{r} = -G * m_2 * \frac{1}{r^2} - G * m_1 * \frac{1}{r^2}$$

$$\#E11: \ddot{r} = -G * (m_1 + m_2) * \frac{1}{r^2}$$

Substitution  $M = m_1 + m_2$ :

$$\#E12: \ddot{r} = -G * M * \frac{1}{r^2}$$

$$\#E13: \dot{r} * \ddot{r} = -G * M * \frac{1}{r^2} * \dot{r}$$

jetzt integrieren wir auf beiden Seiten nach der Zeit:

$$\#E14: \frac{1}{2} * \dot{r}^2 = \frac{G * M}{r} + C \quad \left| \begin{array}{l} \text{um diesen Schritt zu überprüfen, einfach} \\ \text{wieder differenzieren (links mit Produktregel,} \\ \text{rechts mit Quotientenregel)} \end{array} \right.$$

Wir wählen  $C = -\frac{G * M}{d}$  da so  $\dot{r} = \frac{d(r_1 - r_2)}{dt} = \dot{r}_1 - \dot{r}_2$  bei  $r = d$  den Wert 0 annimmt:  
(da laut den Anfangsbedingungen für  $r = d$  gilt:  $\dot{r}_1 = \dot{r}_2 = 0$ )

$$\#E15: \frac{1}{2} * \dot{r}^2 = \frac{G * M}{r} - \frac{G * M}{d}$$

Gleichung #E15 kennen wir bereits, sie ist identisch mit #E2.3.2.9. Darum folgt auch hier #E2.3.2.21 (wir sparen uns hier die entsprechenden Zwischenschritte #E2.3.2.10 bis #E2.3.2.20):

$$\#E16: t = \sqrt{\frac{d^3}{2 * G * M}} * \left[ \arctan \sqrt{\left(\frac{d}{r} - 1\right)} + \frac{r}{d} * \sqrt{\left(\frac{d}{r} - 1\right)} \right]$$

Zurücksubstituieren:

$$\#E17: t = \sqrt{\frac{d^3}{2 * G * (m_1 + m_2)}} * \left[ \arctan \sqrt{\left(\frac{d}{r} - 1\right)} + \frac{r}{d} * \sqrt{\left(\frac{d}{r} - 1\right)} \right]$$

Der Definitionsbereich für  $r$  ist  $D = \{0..d\}$ .

Gleichung #E17 gibt einen Zusammenhang an zwischen dem Abstand  $r$  der beiden Massen und der Zeit  $t$ , die die Massen brauchen, um vom Abstand  $d$  in den Abstand  $r$  zu gelangen.

Wir können auch  $t$  in Abhängigkeit von  $r_1$  angeben:

laut #E3.2.17 gilt:

$$\#E18: r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} * r \quad \left| \begin{array}{l} \text{hier ohne Vektorpfeile (siehe 1.1. und} \\ \text{3.3.)} \end{array} \right.$$

$$\#E19: r = \frac{m_1 + m_2}{m_2} * r_1$$

#E19 in #E17 à #E20:

$$t = \sqrt{\frac{d^3}{2 * G * (m_1 + m_2)}} * \left[ \arctan \sqrt{\left( \frac{m_2 * d}{(m_1 + m_2) * r_1} - 1 \right)} + \frac{(m_1 + m_2) * r_1}{m_2 * d} * \sqrt{\left( \frac{m_2 * d}{(m_1 + m_2) * r_1} - 1 \right)} \right]$$

Der Definitionsbereich für  $r_1$  ist  $D = \left\{ 0.. \frac{m_2}{m_1 + m_2} * d \right\}$ . |  $\frac{m_2}{m_1 + m_2} * d$  entspricht der Anfangsentfernung  $r_1$  bei  $t = 0$

Dementsprechend können wir auch  $t$  in Abhängigkeit von  $r_2$  angeben:

Laut #E3.2.18 gilt:

$$\#E21: r_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} * r \quad | \text{ hier ohne Vektorpfeile (siehe 1.1. und 3.3.)}$$

$$\#E22: r = -\frac{m_1 + m_2}{m_1} * r_2$$

#E22 in #E17 à #E23:

$$t = \sqrt{\frac{d^3}{2 * G * (m_1 + m_2)}} * \left[ \arctan \sqrt{\left( -\frac{m_1 * d}{(m_1 + m_2) * r_2} - 1 \right)} - \frac{(m_1 + m_2) * r_2}{m_1 * d} * \sqrt{\left( -\frac{m_1 * d}{(m_1 + m_2) * r_2} - 1 \right)} \right]$$

Der Definitionsbereich für  $r_2$  ist  $D = \left\{ 0.. -\frac{m_1}{m_1 + m_2} * d \right\}$ . |  $-\frac{m_1}{m_1 + m_2} * d$  entspricht der Anfangsentfernung  $r_2$  bei  $t = 0$

In 7.2.6. wird ein Zahlenbeispiel zu diesem Spezialfall gerechnet.

### 3.3.2. Weg-Zeit-Gleichung mittels Differentialgleichungen

Dieser Spezialfall beschreibt den Fall zweier Massepunkte aufeinander zu (keine der beiden Massen ist relativ zur anderen vernachlässigbar klein), wobei berücksichtigt wird, dass sich die Beschleunigung während des Falls ändert. Um eine Weg-Zeit-Gleichung zu erhalten, benutzen wir Differentialgleichungen.

Wir betrachten das Bezugssystem, in welchem sich der Schwerpunkt des Systems in Ruhe befindet. Die Anfangsentfernung der beiden Körper zueinander sei  $d$ .

Zur Masse  $m_1$  gehört der Radiusvektor  $r_1$ , zur Masse  $m_2$  gehört der Radiusvektor  $r_2$  (siehe #G3.2.1). Die Anfangsgeschwindigkeiten der beiden Körper seien  $v_1(t_0) = \dot{r}_1(t_0)$  und  $v_2(t_0) = \dot{r}_2(t_0)$ .

es gilt:

$$\#E1: r = r_1 - r_2 \quad | \quad r \text{ ist der Abstand der beiden Massen}$$

auf die Körper wirken folgende Kräfte:

$$\#E2: F_1 = -G * m_1 * m_2 * \frac{1}{r^2} \quad | \quad \text{wirkt auf } m_1$$

$$\#E3: F_2 = +G * m_1 * m_2 * \frac{1}{r^2} \quad | \quad \text{wirkt auf } m_2$$

das + kommt daher, dass  $F_1$  und  $F_2$  entgegengesetzt gerichtet sind

da gilt:

$$\#E4: F_1 = m_1 * \ddot{r}_1$$

und

$$\#E5: F_2 = m_2 * \ddot{r}_2$$

sind die entsprechenden Beschleunigungen:

$$\#E6: \ddot{r}_1 = -G * m_2 * \frac{1}{r^2}$$

und

$$\#E7: \ddot{r}_2 = G * m_1 * \frac{1}{r^2}$$

jetzt leiten wir #E1 zweimal nach der Zeit ab:

$$\#E8: \ddot{r} = \frac{d^2(r_1 - r_2)}{dt^2}$$

$$\#E9: \ddot{r} = \ddot{r}_1 - \ddot{r}_2$$

$$\#E6 \text{ und } \#E7 \text{ in } \#E9 \rightarrow \#E10: \ddot{r} = -G * m_2 * \frac{1}{r^2} - G * m_1 * \frac{1}{r^2}$$

$$\#E11: \ddot{r} = -G * (m_1 + m_2) * \frac{1}{r^2}$$

Substitution  $M = m_1 + m_2$ :

$$\#E12: \ddot{r} = -G * M * \frac{1}{r^2}$$

$$\#E13: \dot{r} * \ddot{r} = -G * M * \frac{1}{r^2} * \dot{r}$$

jetzt integrieren wir auf beiden Seiten nach der Zeit:

$$\#E14: \frac{1}{2} * \dot{r}^2 = \frac{G * M}{r} + C \quad \left| \begin{array}{l} \text{um diesen Schritt zu überprüfen, einfach} \\ \text{wieder differenzieren (links mit Produktregel,} \\ \text{rechts mit Quotientenregel)} \end{array} \right.$$

Für  $r = d$  wird  $\dot{r}$  zu  $v_1(t_0) - v_2(t_0)$ , da  $\dot{r} = \frac{d(r_1 - r_2)}{dt} = \dot{r}_1 - \dot{r}_2$  gilt.

daraus folgt:

$$\#E15: \frac{1}{2} * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2 = \frac{G * M}{d} + C$$

$$\#E16: C = \frac{1}{2} * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2 - \frac{G * M}{d}$$

$$\#E16 \text{ in } \#E14 \rightarrow \#E17: \frac{1}{2} * \dot{r}^2 = \frac{G * M}{r} + \frac{1}{2} * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2 - \frac{G * M}{d}$$

$$\#E18: \frac{1}{2} * \dot{r}^2 = G * M * \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d} \right) + \frac{1}{2} * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2$$

Substitution  $v(t_0) = v_1(t_0) - v_2(t_0)$ :

$$\#E19: \frac{1}{2} * \dot{r}^2 = G * M * \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d} \right) + \frac{1}{2} * v(t_0)^2$$

$$\#E20: \dot{r}^2 = 2 * G * M * \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d} \right) + v(t_0)^2$$

$$\#E21: \dot{r} = \pm \sqrt{2 * G * M * \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d} \right) + v(t_0)^2}$$



Wie bereits oben gesagt, ist  $r$  bei  $t_0$  (am Anfang) gleich dem Abstand  $d$ . Damit haben wir gewählt, dass  $r(t_0)$  positiv ist. Wenn die Anfangsgeschwindigkeiten auf den Schwerpunkt zu gerichtet sind, dann wird der Abstandsvektor  $r$  kleiner. Seine Ableitung  $\dot{r}$  ist somit negativ, darum wählen wir  $-\sqrt{\quad}$ :

$$\#E22: \dot{r} = -\sqrt{2 * G * M * \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{d} \right) + v(t_0)^2}$$

Gleichung #E22 kennen wir bereits, sie ist identisch mit #E2.3.3.15 ( $v(t_0)$  entspricht  $v_0$ ). Darum folgt auch hier #E2.3.3.31 (wir sparen uns hier die entsprechenden Zwischenschritte #E2.3.3.16 bis #E2.3.2.30):

#E23:

$$t = -\sqrt{\frac{d^3}{2 * G * M}} * \sqrt{\left( \frac{d}{r} - 1 + \frac{d * v(t_0)^2}{2 * G * M} \right) * \frac{r}{d}}$$

$$* \left( \frac{1}{\left( -1 + \frac{d * v(t_0)^2}{2 * G * M} \right)} - \frac{\ln \left( \frac{1 + 2 * \left( -1 + \frac{d * v(t_0)^2}{2 * G * M} \right) * \frac{r}{d} + 2 * \sqrt{\left( 1 + \left( -1 + \frac{d * v(t_0)^2}{2 * G * M} \right) * \frac{r}{d} \right) * \frac{r}{d} * \left( -1 + \frac{d * v(t_0)^2}{2 * G * M} \right)}}{2 * \sqrt{\left( -1 + \frac{d * v(t_0)^2}{2 * G * M} \right)}} \right)$$

$$+ \frac{\sqrt{\frac{d^3}{2 * G * M}} * 2 * \sqrt{\left( \frac{d * v(t_0)^2}{2 * G * M} \right) * \sqrt{\left( -1 + \frac{d * v(t_0)^2}{2 * G * M} \right)}}}{2 * \left( -1 + \frac{d * v(t_0)^2}{2 * G * M} \right)^{3/2}}$$

$$- \frac{\sqrt{\frac{d^3}{2 * G * M}} * \ln \left( \frac{\left( -1 + \frac{d * v(t_0)^2}{2 * G * M} \right) + 2 * \sqrt{\left( \frac{d * v(t_0)^2}{2 * G * M} \right) * \sqrt{\left( -1 + \frac{d * v(t_0)^2}{2 * G * M} \right)}}}{2 * \sqrt{\left( -1 + \frac{d * v(t_0)^2}{2 * G * M} \right)}} \right)}{2 * \left( -1 + \frac{d * v(t_0)^2}{2 * G * M} \right)^{3/2}}$$

Zurücksubstituieren:

#E24:

$$\begin{aligned}
 t = & -\sqrt{\frac{d^3}{2 * G * (m_1 + m_2)}} * \sqrt{\left(\frac{d}{r} - 1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right) * \frac{r}{d}} \\
 & * \left[ \frac{1}{\left(-1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right)} - \frac{\ln \left( \frac{1 + 2 * \left(-1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right) * \frac{r}{d} + 2 * \sqrt{\left(1 - \frac{r}{d} + \frac{(v_1(t_0) - v_2(t_0))^2 * r}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right) * \frac{r}{d}} * \sqrt{\left(-1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right)}}{2 * \sqrt{\left(-1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right)}} \right] \\
 & + \frac{\sqrt{\frac{d^3}{2 * G * (m_1 + m_2)}} * 2 * \sqrt{\left(\frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right) * \sqrt{\left(-1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right)}}{2 * \left(-1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right)^{3/2}} \\
 & - \frac{\sqrt{\frac{d^3}{2 * G * (m_1 + m_2)}} * \ln \left( \frac{\left(-1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{G * (m_1 + m_2)}\right) + 2 * \sqrt{\left(\frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right) * \sqrt{\left(-1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right)}}{2 * \sqrt{\left(-1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right)}} \right)}{2 * \left(-1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

Der Definitionsbereich (für das Fallen zum Schwerpunkt hin) für  $r$  geht von 0 bis  $d$ .

Gleichung #E24 gibt einen Zusammenhang an zwischen dem Abstand  $r$  der beiden Massen und der Zeit  $t$ , die die Massen brauchen, um vom Abstand  $d$  in den Abstand  $r$  zu gelangen.

Wir könnten jetzt auch analog zu #E3.3.1.18 bis #E3.3.1.23  $t$  in Abhängigkeit von  $r_1$  und  $t$  in Abhängigkeit von  $r_2$  angeben. Aus Platz- und Aufwandsgründen erfolgt dies hier jedoch nicht.

Wenn wir annehmen, die Anfangsgeschwindigkeiten seien vom Schwerpunkt weg gerichtet, dann wählen wir nach Gleichung #E21  $+\sqrt{\quad}$ , da dann  $\dot{r}$  positiv ist. Die Schritte #E22 bis #E24 führen wir dann entsprechend aus und erhalten:

#E24\*(-1) à #E25:

$$t = \sqrt{\frac{d^3}{2 * G * (m_1 + m_2)}} * \sqrt{\left(\frac{d}{r} - 1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right) * \frac{r}{d}}$$

$$* \left[ \frac{1}{\left(-1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right)} - \frac{\ln \left( \frac{1 + 2 * \left(-1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right) * \frac{r}{d} + 2 * \sqrt{\left(1 - \frac{r}{d} + \frac{(v_1(t_0) - v_2(t_0))^2 * r}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right) * \frac{r}{d}} * \sqrt{\left(-1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right)}}{2 * \sqrt{\left(-1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right)}} \right]$$

$$- \frac{\sqrt{\frac{d^3}{2 * G * (m_1 + m_2)}} * 2 * \sqrt{\left(\frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right)} * \sqrt{\left(-1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right)}}{2 * \left(-1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right)^{3/2}}$$

$$+ \frac{\sqrt{\frac{d^3}{2 * G * (m_1 + m_2)}} * \ln \left( \frac{\left(-1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{G * (m_1 + m_2)}\right) + 2 * \sqrt{\left(\frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right)} * \sqrt{\left(-1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right)}}{2 * \sqrt{\left(-1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right)}} \right)}{2 * \left(-1 + \frac{d * (v_1(t_0) - v_2(t_0))^2}{2 * G * (m_1 + m_2)}\right)^{3/2}}$$

Der Definitionsbereich (für den Flug vom Schwerpunkt weg) für  $r$  geht von  $d$  bis dem durch die Gesamtenergie gegebenen Maximalwert.

Gleichung #E25 gibt einen Zusammenhang an zwischen dem Abstand  $r$  der beiden Massen und der Zeit  $t$ , die die Massen brauchen, um vom Abstand  $d$  in den Abstand  $r$  zu gelangen.

Auch hier könnten wir jetzt analog zu #E3.3.1.18 bis #E3.3.1.23  $t$  in Abhängigkeit von  $r_1$  und  $t$  in Abhängigkeit von  $r_2$  angeben. Aus Platz- und Aufwandsgründen erfolgt dies hier jedoch nicht.

#### 4. 3- und Mehrkörperprobleme

Für 3 und mehr Körper sind die Bewegungsgleichungen (von einigen Spezialfällen abgesehen) nur noch numerisch lösbar. In diesem Kapitel werden wir Methoden der numerischen Lösung und ein von mir entwickeltes Programm zur numerischen Lösung von Mehrkörperproblemen betrachten:

##### 4.1. Prinzip der numerischen Lösung

Da sich, wie schon in 4. erwähnt, aus den Bewegungsgleichungen (#E1.2.10) für  $n \geq 3$  keine eindeutige Positionen der Körper zu einem beliebigem Zeitpunkt herleiten lassen, müssen wir diese numerisch ermitteln:

Gleichung

$$\#E1.2.10: \ddot{\vec{r}}_i = -G * \sum_{j=1}^n \left( m_j * \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} \right) \quad | \text{ für } j \text{ ungleich } i$$

erlaubt es uns, die momentane Gesamtbeschleunigung  $\vec{a}_0 = \ddot{\vec{r}}_i$  des Körpers i zu einem Zeitpunkt  $t_0$  zu berechnen. Zu diesem Zeitpunkt hat der Körper die Geschwindigkeit  $\vec{v}_0$  und die Position  $\vec{r}_0$ .

Wir nehmen nun an, die Beschleunigung sei für die Zeitspanne  $\Delta t$  konstant.

Zum Zeitpunkt  $t_1=t_0+\Delta t$  haben wir nun die Geschwindigkeit #E1:  $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 * \Delta t$  und die Position #E2:  $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{r}_v + \vec{r}_a$ , wobei #E3:  $\vec{r}_v = \vec{v}_0 * \Delta t$  die von der

Anfangsgeschwindigkeit erbrachte Positionsänderung ist und #E4:  $\vec{r}_a = \frac{1}{2} * \vec{a}_0 * (\Delta t)^2$  von der Beschleunigung stammt.

Wenn wir #E3 und #E4 in #E2 einsetzen, erhalten wir

$$\#E5: \vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 * \Delta t + \frac{1}{2} * \vec{a}_0 * (\Delta t)^2$$

Wenn wir die Gleichungen #E1 und #E5 verallgemeinern, lauten sie

$$\#E6: \vec{v}_{x+1} = \vec{v}_x + \vec{a}_x * \Delta t$$

und

$$\#E7: \vec{r}_{x+1} = \vec{r}_x + \vec{v}_x * \Delta t + \frac{1}{2} * \vec{a}_x * (\Delta t)^2$$

Somit können wir für jeden der n Körper nach einem Zeitintervall t die approximierte Position und Geschwindigkeit bestimmen, indem wir mit geeignet gewähltem  $\Delta t$  folgende Schritte für alle Körper k mal durchführen ( $k=t/\Delta t$ ):

- mit Gleichung #E1 die gesamte Momentanbeschleunigung  $\vec{a}_x = \ddot{\vec{r}}_i$  berechnen
- $\vec{v}_{x+1}$  mit Hilfe von  $\vec{a}_x$  und  $\vec{v}_x$  berechnen (#E6)
- $\vec{r}_{x+1}$  mit Hilfe von  $\vec{a}_x$ ,  $\vec{v}_x$  und  $\vec{r}_x$  berechnen (#E7)

Es ist zu erwarten, dass die Approximation umso genauer wird, je kleiner das gewählte  $\Delta t$  ist. Darauf werde ich in 4.2.2.2. genauer eingehen.

## 4.2. ORBITER

Das Programm zur Simulation von Mehrkörperproblemen habe ich ORBITER genannt. Es besteht aus zwei Komponenten: ORBITER 2D und ORBITER 3D. Es ist vollständig in PASCAL geschrieben. Nach der Fertigstellung werde ich es eventuell aus Geschwindigkeitsgründen in C++ konvertieren. Compiliert wurde das Programm

mit FREEPASCAL (#Q6) (kostenlos, großer Funktionsumfang). Für die Grafikdarstellung verwendete ich die ebenfalls kostenlose Bibliothek GraphiX (#Q7). Ich habe ORBITER der GNU General Public License (#Q8) unterstellt, damit es, nach seiner Fertigstellung, für jedermann gratis zu Verfügung steht.

Die folgenden auftretenden Angaben von Rechenzeiten beziehen sich auf den verwendeten AMD Athlon TB 900.

## **4.2.1. Programmentwicklung**

### **4.2.1.1. Grundstruktur**

Die zentrale Struktur von ORBITER 2D besteht aus einer Schleife, welche fortlaufend abgearbeitet wird. Sie ist folgendermaßen aufgebaut:

- Zuerst werden mittels zweier verschachtelter Schleifen die x- und y-Komponenten des Gesamtbeschleunigungsvektors (siehe #E1.2.10) eines jeden Körpers berechnet.
- Dann wird mit einer weiteren Schleife für jeden Körper Folgendes durchgeführt:
  - Berechnung der Bewegung in x-Richtung aufgrund der vorherigen Geschwindigkeit in x-Richtung. Berechnung der Bewegung in y-Richtung aufgrund der vorherigen Geschwindigkeit in y-Richtung.
  - Berechnung der Bewegung in x-Richtung aufgrund der Gesamtbeschleunigung in x-Richtung. Berechnung der Bewegung in y-Richtung aufgrund der Gesamtbeschleunigung in y-Richtung.
  - Berechnung der neuen Geschwindigkeit in x-Richtung aufgrund der Gesamtbeschleunigung in x-Richtung. Berechnung der neuen Geschwindigkeit in y-Richtung aufgrund der Gesamtbeschleunigung in y-Richtung.

### **4.2.1.2. Grafik**

Meine 2D-Grafik-Engine ist ziemlich einfach aufgebaut:

Die Koordinaten der Körper entsprechen bis auf einen Korrekturfaktoren den Koordinaten der Pixel (mit 0,0 in der Mitte des Bildschirms). Diese Korrekturmaßnahme besteht darin, alle Koordinaten mit einem Zoom-Faktor zu multiplizieren, damit man einen kleineren, bzw. größeren Ausschnitt der Ebene betrachten kann.

Es gibt auch die Möglichkeit, sich in der Ebene zu bewegen (um somit bestimmte Punkte zu zentrieren) und sich zu drehen:

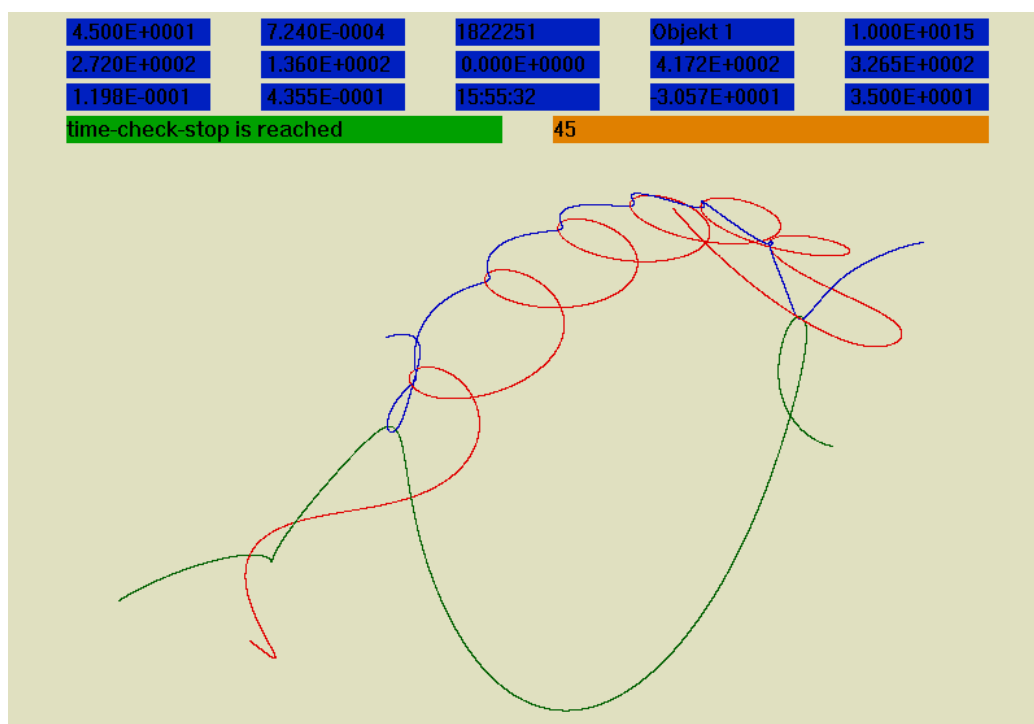
Bei den linearen Bewegungen (hoch/runter, links/rechts) wird zu den Koordinaten aller Körper ein entsprechender Summand addiert. Bei Drehungen werden die alten Körperkoordinaten mit Hilfe der Winkelsätze in die neuen übergeführt. Diese Methoden haben den Vorteil, dass keine komplizierten Berechnungen notwendig sind, um die Körper auf dem Bildschirm darzustellen. Allerdings muss man, um die

Position der Körper im ursprünglichen (nicht verschobenen und nicht gedrehten) Bezugssystem zu erhalten, folgende Maßnahmen durchführen:

- 1.) die Drehungen rückgängig machen, indem man um  $-\alpha$  dreht ( $\alpha$  ist die Summe der Drehwinkel aller durchgeführten Drehungen)
- 2.) die Verschiebungen rückgängig machen, indem man einen Punkt P, auf den man die gleichen Transformationen wie auf die Körper angewendet hat, wieder auf seine ursprüngliche Position zurückführt und diese Rückverschiebung auch auf die Körper anwendet.

Als Nächstes werde ich auf das Interface von ORBITER 2D eingehen, indem ich es anhand eines Screenshots (#G1) kurz erläutere:

Das Interface (ausblendbar) besteht aus einer 17-elementigen Kontrollleiste. Diese Elemente sind in 4 Zeilen unterteilt und werden nun (von links nach rechts) aufgelistet:



[#G1]

Zeile 1:

- berechnete Zeit des simulierten Mehrkörper-Systems (in Sekunden)
- aktueller Zeitschritt  $\Delta t$  (in Sekunden)
- bisherige Rechenzyklen
- Name des aktuellen Objekts
- Masse des aktuellen Objekts

Zeile 2:

- x-Koordinate des zentrierten Punkts
- y-Koordinate des zentrierten Punkts
- Radius des aktuellen Objekts (ist immer 0, da die bisherige Version von ORBITER nur mit punktförmigen Massen rechnet)
- x-Koordinate des aktuellen Objekts

- y-Koordinate des aktuellen Objekts

Zeile 3:

- aktuelles  $d_{w(\text{act})}$  (in Prozent); siehe 4.2.1.3.2.
- aktuelles  $d_w$  (in Prozent); siehe 4.2.1.3.1.
- Uhrzeit
- x-Komponente der Geschwindigkeit des aktuellen Objekts
- y-Komponente der Geschwindigkeit des aktuellen Objekts

Zeile 4:

- Ausgabefenster
- Eingabefenster

Erläuterungen:

Als „aktuelles Objekt“ kann jeder der  $n$  Körper mittels der Taste „v“ ausgewählt werden. Alle Koordinaten beziehen sich stets auf das ursprüngliche, nicht verschobene und nicht gedrehte Bezugssystem.

#### 4.2.1.3. Genauigkeitsüberprüfung

Eine Möglichkeit, die Genauigkeit eines simulierten Systems zu überprüfen, ist es, sich an Erhaltungsgrößen zu orientieren.

##### 4.2.1.3.1. Energie

Eine Größe, welche bei gravitativen Mehrkörpersystemen erhalten bleibt, ist die Gesamtenergie. Nicht jeder Fehler in der Simulation führt zwangsläufig zu einer Änderung der Gesamtenergie des Systems, tritt jedoch solch eine Änderung auf, dann muss es an einem Simulationsfehler liegen (wenn Energieabweichung dann Fehler). Bei einer kleinen Energieabweichung ist dieser Fehler auch klein und bei einer großen Abweichung dementsprechend groß. Die momentane Energieabweichung  $\Delta W_x$  ( $x$  steht für den  $x$ -ten Rechenzyklus) ist gleich dem Betrag der Differenz der Anfangsenergie  $W_{ges_0}$  und der momentanen Energie  $W_{ges_x}$ :

$$\#E1: \Delta W_x = |W_{ges_x} - W_{ges_0}|$$

Um einen objektiven Wert zu erhalten, dividieren wir  $\Delta W_x$  durch den Betrag der Anfangsenergie  $W_{ges_0}$ . Den Quotienten nennen wir  $d_{W_x}$ . So können wir den prozentualen Energiefehler betrachten.

$$\#E2: d_{W_x} = \frac{\Delta W_x}{|W_{ges_0}|}$$

wegen #E1 folgt:

$$\#E3: d_{W_x} = \frac{|W_{ges_x} - W_{ges_0}|}{|W_{ges_0}|}$$

Nun muss nur noch die anfängliche und die momentane Gesamtenergie berechnet werden, um  $d_{W_x}$  zu erhalten. Die Gesamtenergie ist gleich der Summe aus kinetischer Energie und potentieller Energie:

$$\#E4: W_{ges} = W_{kin} + W_{pot}$$

Die kinetische Energie eines Körpers i ist:

$$\#E5: W_{kin_i} = \frac{1}{2} * m_i * |\vec{v}_i|^2$$

Die kinetische Energie eines Systems von n Körpern ist damit:

$$\#E6: W_{kin} = \frac{1}{2} * \sum_{i=1}^n m_i * |\vec{v}_i|^2$$

Die potentielle Energie zweier Körper i und j ist:

$$\#E7: W_{pot_{ij}} = -G * m_i * m_j * \frac{1}{|\vec{r}_{ji}|}$$

Die potentielle Energie eines Systems von n Körpern, also die Summe aller wechselseitigen potentiellen Energien, ist:

$$\#E8: W_{pot} = \sum_{i=1}^n \left[ -G * m_i * \sum_{j=i+1}^n m_j * \frac{1}{|\vec{r}_{ji}|} \right]$$

ORBITER berechnet bei jedem Rechenzyklus  $d_{W_x}$  entsprechend der folgenden Formel:

$$\#E9: d_{W_x} = \frac{\left[ \frac{1}{2} * \sum_{i=1}^n m_i * |\vec{v}_i|^2 - \sum_{i=1}^n \left[ -G * m_i * \sum_{j=i+1}^n m_j * \frac{1}{|\vec{r}_{ji}|} \right] \right] - W_{ges_0}}{|W_{ges_0}|}$$

( $W_{ges_0}$  wird nur einmal am Anfang berechnet; alle Geschwindigkeiten und Entfernungen beziehen sich auf den x-ten Rechenzyklus)

Diese Art der Genauigkeitsüberprüfung ist sehr verbreitet, sie wird beispielsweise auch bei #Q9 verwendet.

#### 4.2.1.3.2. $W_{act}$

Die Überprüfung der Genauigkeit anhand von  $d_{W_x}$  hat allerdings einen Nachteil, den ich hier nun kurz anhand eines Beispiels erläutern möchte:



Betrachten wir 2 gravitative Mehrkörpersysteme: Das eine System (S1) hat eine kinetische Energie  $W_{\text{kin}}=1\text{J}$  und eine potentielle Energie  $W_{\text{pot}}=-2\text{J}$ ; das andere System (S2) hat eine kinetische Energie  $W_{\text{kin}}=1001\text{J}$  und eine potentielle Energie  $W_{\text{pot}}=-1002\text{J}$ .

Die Gesamtenergie  $W_{\text{ges}}$  beträgt bei beiden Systemen  $-1\text{J}$ .

Bei einer Energieabweichung  $\Delta W=1\text{J}$  ergäben sich laut #E4.2.1.3.1.2 die folgenden prozentualen Energiefehler  $d_w$ :

$$\text{\#E1: (S1) } d_w = \frac{1J}{|1J - 2J|} = \frac{1J}{1J} = 1 = 100\%$$

$$\text{\#E2: (S2) } d_w = \frac{1J}{|1001J - 1002J|} = \frac{1J}{1J} = 1 = 100\%$$

Es ist allerdings einsichtig, dass eine Energieabweichung von  $1\text{J}$  in System 1 eine viel größere Veränderung der Bewegung der Körper zufolge hat als in System 2. (In System 1 könnte durch die Energieabweichung beispielsweise  $W_{\text{kin}}$  auf 0 sinken, damit wären dann auch die Geschwindigkeiten aller Körper 0. In System 2 könnte  $W_{\text{kin}}$  dagegen nur um ca.  $0,1\%$  verändert werden.)

Aus diesem Grund habe ich eine Größe eingeführt, welche die kinetische und potentielle Energie direkt berücksichtigt, und nicht nur deren Summe  $W_{\text{ges}}$ . Diese Größe trägt den Namen „aktive Energie“ ( $W_{\text{act}}$ ). Sie ist keine reale, im System vorkommende Energie, sondern die Summe der Beträge von kinetischer und potentieller Energie:

$$\text{\#E3: } W_{\text{act}} = |W_{\text{kin}}| + |W_{\text{pot}}|$$

Wie schon gesagt hat diese Größe nur die Aufgabe, die Veränderung der Genauigkeit des simulierten Systems möglichst gut zu beschreiben.

Analog zu 4.2.1.3.1. führen wir eine Größe  $d_{w(act)_x}$  ein. Diese ist hier die Summe von  $\Delta d_{w(act)_x}$  und  $d_{w(act)_{x-1}}$ , sie wird also rekursiv berechnet:

$$\text{\#E4: } d_{w(act)_x} = \Delta d_{w(act)_x} + d_{w(act)_{x-1}}$$

( definitionsgemäß gilt:  $d_{w(act)_0} = 0$  )

$\Delta d_{w(act)_x}$  wird analog zu #E4.2.1.3.1.2 nach folgender Gleichung berechnet:

$$\text{\#E5: } \Delta d_{w(act)_x} = \frac{\Delta W_x}{W_{act_x}}$$

(  $W_{act}$  ist von  $x$  abhängig, da es sich im Gegensatz zu  $W_{ges_0}$  ständig ändert.)

$\Delta W_x$  beschreibt hier nicht die Differenz der Gesamtenergie des momentanen Rechenzyklus und  $W_{ges_0}$ , sondern die Differenz der Gesamtenergie des momentanen Rechenzyklus und der Gesamtenergie des letzten Rechenzyklus:

$$\#E6: \Delta W_x = |W_{ges_x} - W_{ges_{x-1}}|$$

$$\#E6 \text{ in } \#E5 \rightarrow \#E7: \Delta d_{W(akt)_x} = \frac{|W_{ges_x} - W_{ges_{x-1}}|}{W_{act_x}}$$

wegen #E4.2.1.3.1.4 und #E3 folgt:

$$\#E8: \Delta d_{W(akt)_x} = \frac{|W_{kin_x} + W_{pot_x} - W_{ges_{x-1}}|}{|W_{kin_x}| + |W_{pot_x}|}$$

#E8 in #E4 à

$$\#E9: d_{W(akt)_x} = \frac{|W_{kin_x} + W_{pot_x} - W_{ges_{x-1}}|}{|W_{kin_x}| + |W_{pot_x}|} + d_{W(akt)_{x-1}}$$

Mit dieser Gleichung (#E9) berechnet ORBITER zu jedem Rechenzyklus x die prozentuale Abweichung  $d_{W(akt)_x}$ . Dabei sind  $d_{W(akt)_{x-1}}$  und  $W_{ges_{x-1}}$  vom vorherigen Rechenzyklus gegeben.  $W_{kin_x}$  und  $W_{pot_x}$  werden entsprechend der Gleichungen #E4.2.1.3.1.6 und #E4.2.1.3.1.8 bestimmt.

Betrachten wir nun das oben genannte Problem der zwei Systeme mit Hilfe von  $d_{W(akt)}$ :

Nehmen wir an, die komplette Energieabweichung  $\Delta W = 1J$  entsteht zwischen zwei Rechenzyklen, dann ergäben sich folgende  $\Delta d_{W(akt)}$ :

$$\#E10:(S1) \Delta d_{W(akt)} = \frac{1J}{|1J| + |-2J|} = \frac{1J}{3J} = \frac{1}{3} \approx 33\%$$

$$\#E11:(S2) \Delta d_{W(akt)} = \frac{1J}{|1001J| + |-1002J|} = \frac{1J}{2003J} = \frac{1}{2003} \approx 0,05\%$$

Diese Werte repräsentieren besser den Einfluss von  $\Delta W$  auf das jeweilige System.

#### 4.2.1.4. Optimierung der Genauigkeit

Die Optimierung der Genauigkeit besteht aus zwei Teilen: Erstens die Erhöhung der Genauigkeit der berechneten Ergebnisse. Zweitens sollte diese größere Genauigkeit nach Möglichkeit mit einem nur gering erhöhten Zeitaufwand verbunden sein.

Die erste Bedingung wird vermutlich dadurch erfüllt, dass man den Zeitschritt  $\Delta t$  verkleinert, allerdings steigt dabei auch die Rechenzeit erheblich an. Um beide Bedingungen zu erfüllen, müsste man die Rechengenauigkeit an „kritischen Stellen“ erhöhen und an „unkritischen Stellen“ wieder senken.

Dies kann dadurch bewerkstelligt werden, dass man  $\Delta t$  so verändert, dass es sich stets proportional zur kleinsten momentanen Entfernung zweier Körper ( $r_{\min}$ ) verhält. Das kann man dadurch begründen, dass bei kleiner Entfernung die Geschwindigkeiten der Körper und die Kräfte, die auf sie wirken, größer sind und damit auch die Positionsänderung während  $\Delta t$  größer ist. Wählt man  $\alpha$  als Proportionalitätsfaktor, so wird  $\Delta t$  bei jedem Rechenzyklus nach folgender Formel berechnet:

$$\#E1: \Delta t = \alpha * r_{\min}$$

Noch effektiver scheint es,  $\Delta t$  proportional zum Quadrat von  $r_{\min}$  zu wählen, da sich aus Gleichung #E1.2.6 ableiten lässt, dass sich die Kraft proportional zum Kehrwert des Quadrats der Entfernung verhält. Wählen wir  $\beta$  als Proportionalitätsfaktor, so folgt für  $\Delta t$  die Gleichung:

$$\#E2: \Delta t = \beta * (r_{\min})^2$$

In Gleichung #E2 werden jedoch nicht die Massen der Körper berücksichtigt. So werden bei gleicher Entfernung zwei kleine Massen kaum miteinander interagieren; ist eine der Massen allerdings sehr groß, so fällt auch die Beschleunigung entsprechend groß aus. Da die Beschleunigung die Geschwindigkeit verändert und zusammen mit der Anfangsgeschwindigkeit des jeweiligen Rechenzyklus für die Positionsänderung verantwortlich ist, wähle ich hier  $\Delta t$  proportional zum Kehrwert des Betrags der maximalen momentanen Beschleunigung  $\vec{a}_{\max}$  (mit  $\gamma$  als Proportionalitätsfaktor):

$$\#E3: \Delta t = \gamma * \frac{1}{|\vec{a}_{\max}|}$$

#### 4.2.1.5. 3D-Erweiterung

Die Umstellung von ORBITER auf 3 Dimensionen bestand aus zwei Teilen:

1. Veränderung der berechnenden Strukturen .
2. Entwicklung einer 3D-Engine zur grafischen Darstellung.

Punkt 1 war dabei das kleinere Problem, da ich schon bei ORBITER 2D mit Vektoren gearbeitet hatte. Die zweielementigen Vektoren (x|y) mussten auf drei Elemente (x|y|z) erweitert werden. Dementsprechend wurden auch einige Berechnungsroutinen leicht modifiziert.

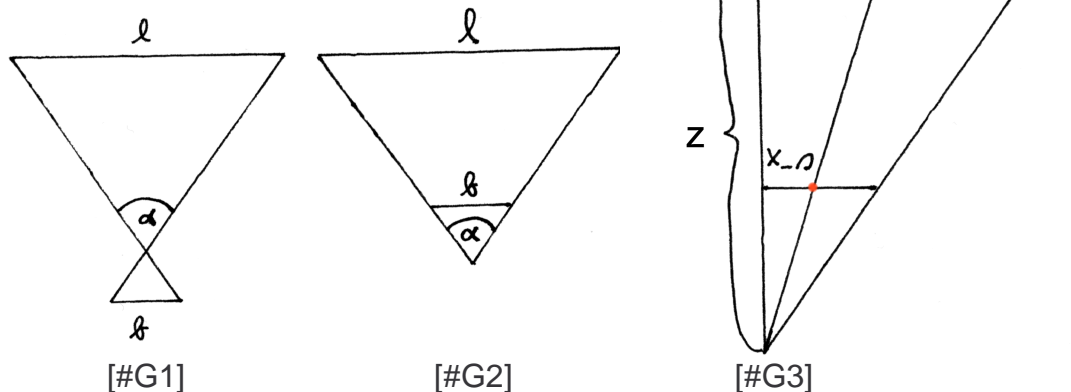
(Beispielsweise wird die Entfernung  $|\vec{r}_{ji}|$  zweier Objekte statt wie vorher mit

$$\#E1: |\vec{r}_{ji}| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \text{ nun mit}$$

$$\#E2: |\vec{r}_{ji}| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \text{ berechnet.)}$$

Punkt 2 war dagegen komplizierter zu lösen:

Das Prinzip meiner 3D-Engine ähnelt entfernt dem einer Lochkamera (#G1):



Die Länge  $l$  wird in #G1 auf  $b$  abgebildet. Der Öffnungswinkel ist  $\alpha$ . Da diese Abbildung allerdings spiegelverkehrt ist, wird  $b$  „nach vorne geklappt“ (#G2). (#G3) zeigt die rechte Hälfte von #G2. Der Punkt  $x$  in der Entfernung  $z$  wird auf den Punkt  $x_s$  auf  $b$  abgebildet (beide rot). Laut den Strahlensätzen gilt:

$$\text{\#E3: } \frac{x_s}{x} = \frac{b/2}{l/2}$$

Weiterhin wissen wir:

$$\text{\#E4: } \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{b/2}{z}$$

Daraus folgt:

$$\text{\#E5: } x_s = x * \frac{b}{2} * \frac{1}{z * \tan(\alpha/2)}$$

Nach dieser Formel werden die  $x$ -Koordinaten der Körper auf die Koordinaten des Bildschirms umgerechnet. Entsprechend gilt für die  $y$ -Koordinaten:

$$\text{\#E6: } y_s = y * \frac{b}{2} * \frac{1}{z * \tan(\alpha/2)}$$

Die  $b$ 's in #E5 und #E6 müssen übereinstimmen, da das Bild sonst verzerrt ist. Bei ORBITER 3D habe ich für  $b$  die Anzahl der Pixel der  $y$ -Auflösung gewählt (600 bei 800x600 usw.).  $z$  ist die  $z$ -Koordinate des jeweiligen Körpers. Der Zoom funktioniert durch Veränderung des Blickwinkels  $\alpha$ .

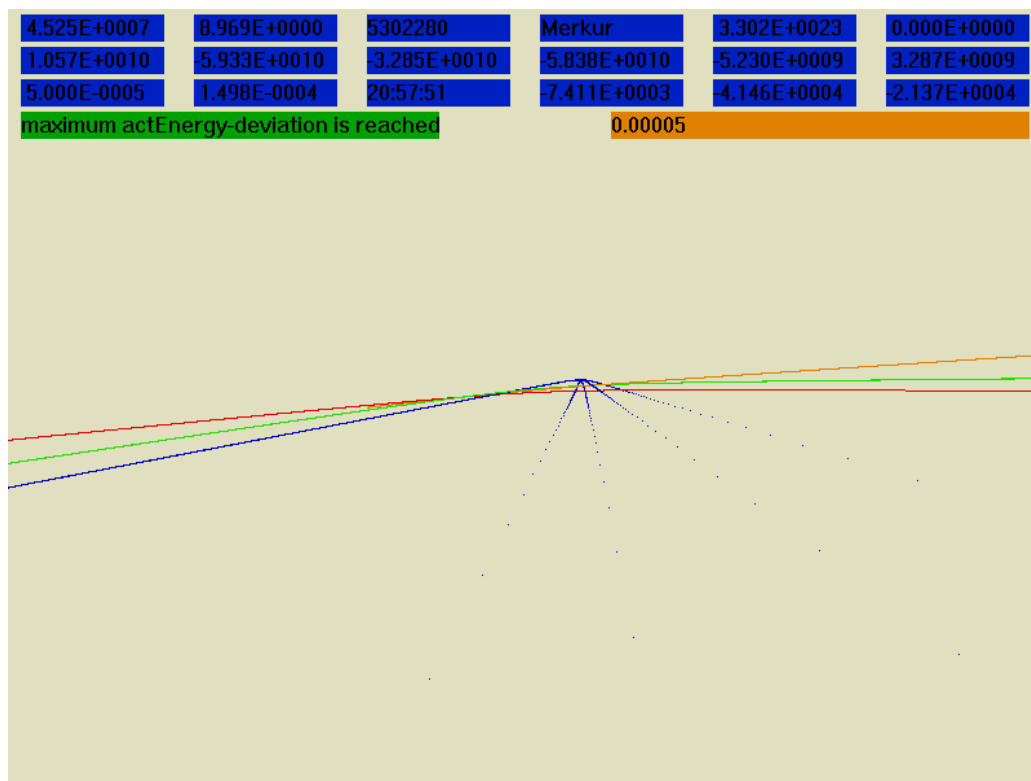
Wie bei ORBITER 2D kann man sich auch bei ORBITER 3D frei bewegen. Es gibt die Möglichkeit zur Bewegung in allen drei Dimensionen sowie des Drehens um  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Achse. Analog zu ORBITER 2D werden auch hier die Koordinaten aller Punkte bei einer Bewegung verändert.

Die Rückführung der Position der Körper in das ursprüngliche Bezugssystem gestaltet sich hier etwas schwieriger: Zu diesem Zweck habe ich drei Fixpunkte eingeführt, welche im ursprünglichen Bezugssystem verharren. Auf diese Punkte

werden die gleichen Transformationen angewendet, wie auf die Körper. Nun führt man die drei Punkte wieder auf ihre vorherige Position zurück. Wenn man die dafür notwendigen „Rückverschiebungs-Transformationen“ auch auf die Körper anwendet, erhält man ihre Position in ihrem ursprünglichen Bezugssystem.

Nun folgt ein Screenshot (#G4) des Interface von ORBITER 3D.

Bei ORIBTER 3D besteht das Interface aus einer 20-elementigen Kontrollleiste:



[#G4]

Zeile 1:

- berechnete Zeit des simulierten Mehrkörper-Systems (in Sekunden)
- aktueller Zeitschritt  $\Delta t$  (in Sekunden)
- bisherige Rechenzyklen
- Name des aktuellen Objekts
- Masse des aktuellen Objekts
- Radius des aktuellen Objekts

Zeile 2:

- x-Koordinate des zentrierten Punkts
- y-Koordinate des zentrierten Punkts
- z-Koordinate des zentrierten Punkts
- x-Koordinate des aktuellen Objekts
- y-Koordinate des aktuellen Objekts
- z-Koordinate des aktuellen Objekts

Zeile 3:

- aktuelles  $d_{w(\text{act})}$  (in Prozent); siehe 4.2.1.3.2.

- aktuelles  $d_w$  (in Prozent); siehe 4.2.1.3.1.
- Uhrzeit
- x-Komponente der Geschwindigkeit des aktuellen Objekts
- y-Komponente der Geschwindigkeit des aktuellen Objekts
- z-Komponente der Geschwindigkeit des aktuellen Objekts

Zeile 4:

- Ausgabefenster
- Eingabefenster

#### **4.2.1.6. Sonstiges**

Beide Versionen von ORBITER besitzen ein Menü, in dem man zahlreiche simulationsspezifische Einstellungen vornehmen kann. Weiterhin kann man über eine spezielle Eingabemaske die einzelnen Körper erstellen oder ihre Eigenschaften verändern. Die so entstandenen „Szenarien“ können in .scn- (ORBITER 2D) bzw. .sc3-Dateien (ORBITER 3D) gespeichert und von dort auch wieder geladen werden. Eine nützliche Option ermöglicht es, die Positionen der Körper bei jedem Rechenzyklus tabellarisch in eine LOG-Datei zu schreiben.

### **4.2.2. Ergebnisse**

#### **4.2.2.1. Programm**

Das Computerprogramm ORBITER liegt z. Z. in der Version 0.7.5 vor. ORBITER hat zwar noch einige „Kinderkrankheiten“, beispielsweise arbeitet es auf einigen Rechnern nur wenige Sekunden, stoppt dann und rechnet erst auf Tastendruck weiter, jedoch bin ich zuversichtlich, dieses und einige andere Probleme mit einer der nächsten Versionen beheben zu können. Ich habe auch ein Kurzhandbuch für ORBITER verfasst. Dieses befindet sich auch in Kapitel 7.3. (im Anhang).

#### **4.2.2.2. Genauigkeit**

Um die Genauigkeit der errechneten Daten zu überprüfen, können die in 4.2.1.3. genannten programminternen Methoden verwendet werden.

Eine noch bessere Vergleichsmöglichkeit bietet sich natürlich, wenn man die zu berechnenden Daten bereits vorher auf andere Weise bestimmt hat. Dies hilft zwar nicht bei unbekannten Systemen, allerdings können so die in 4.2.1.4. genannten Methoden zur Erhöhung der Genauigkeit auf ihre Tauglichkeit hin überprüft werden. Weiterhin kann so grundsätzlich die Richtigkeit der numerischen Lösungsmethoden von ORBITER überprüft werden.

Im Folgenden werden beide Arten der Überprüfung, teilweise auch kombiniert, angewendet:

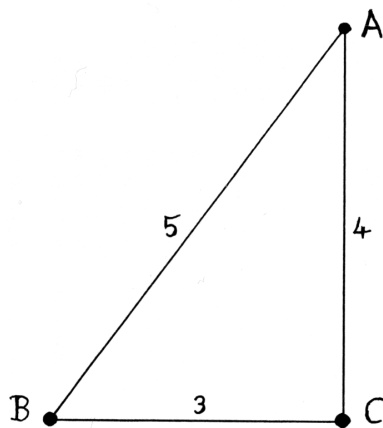
##### **4.2.2.2.1. Pythagoras**

Das Pythagorasproblem fand ich als Beispiel auf S.248 von #Q12. Die drei Körper befinden sich ohne Anfangsgeschwindigkeit entsprechend der Abbildung #G1 in den Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Seitenlängen 3m, 4m und 5m. Ihre Massen sind:

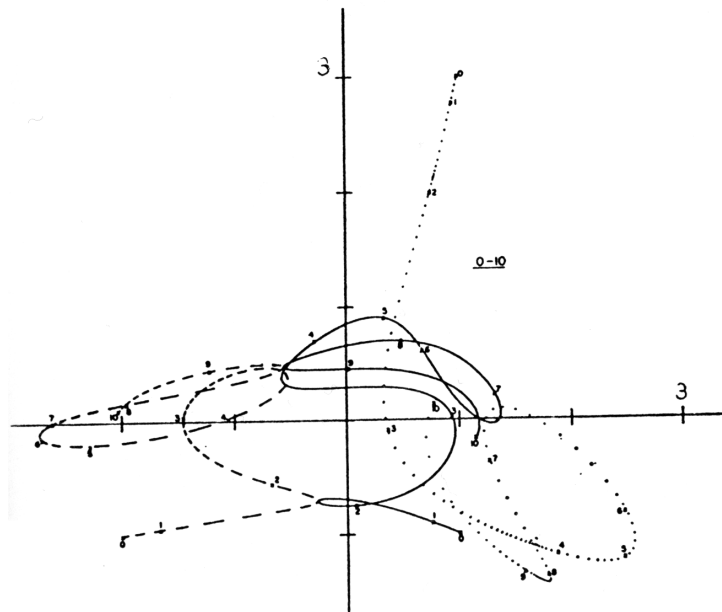
$$m_A = 3 * \frac{1}{G} m^3 s^{-2}, \quad m_B = 4 * \frac{1}{G} m^3 s^{-2} \quad \text{und} \quad m_C = 5 * \frac{1}{G} m^3 s^{-2}$$

(G ist die Gravitationskonstante;  $G=6,672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ )

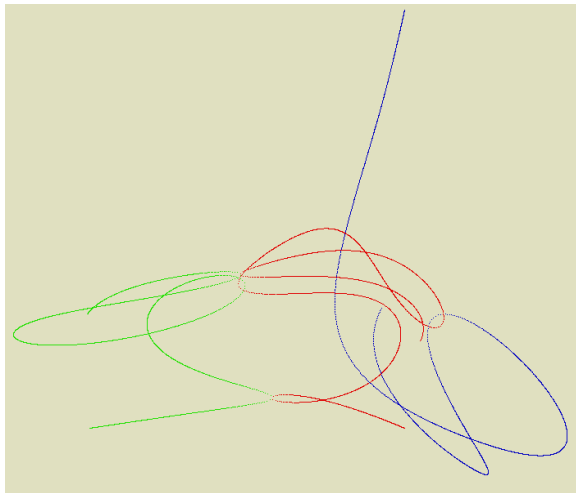
Die Abbildungen #G1 und #G2 stammen aus #Q12. #G2 zeigt die Bewegung der Körper in den ersten 10 Sekunden. #G3 und #G4 sind Simulationen dieser Bewegung mittels ORBITER 2D. Beide zeigen ebenfalls die ersten 10 Sekunden und benötigten eine Rechenzeit von ca. 4 Minuten. Die gestrichelte Linie in #G2 entspricht der grünen Linie in den Simulationen, die gepunktete Linie der blauen und die durchgezogene Linie der roten. Wie man leicht erkennen kann, stimmt #G3, bei welchem mit  $\Delta t$  proportional zum Kehrwert der Beschleunigung ist, nahezu vollkommen mit #G2 überein. Bei #G4 wurde dagegen mit konstanten  $\Delta t$  gerechnet. Hier ist kaum eine Ähnlichkeit erkennbar. Diese Tatsache und die Diagramme #G5 und #G6 stehen im Widerspruch zu #Q9. Dort wird nämlich gesagt, dass ein flexibler Zeitschritt  $\Delta t$  keine großen Vorteile bringt. Ich vermute, dass der Widerspruch darin begründet ist, dass in #Q9 nur Systeme simuliert wurden, bei denen die Entfernungsunterschiede nicht so extrem sind wie hier.



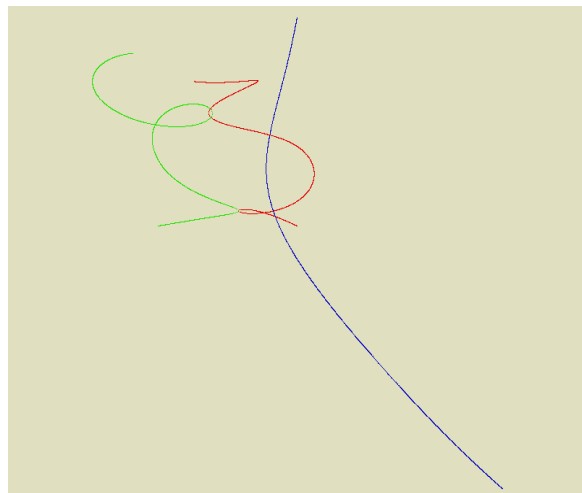
[#G1]



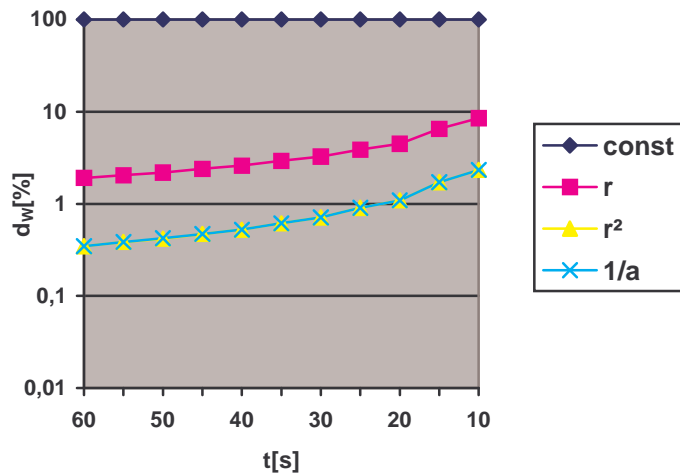
[#G2]



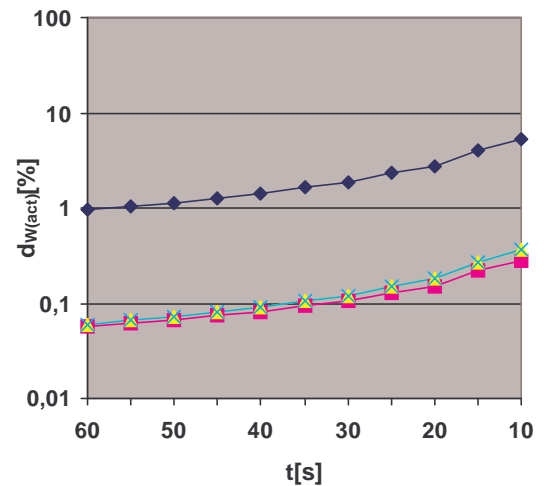
[#G3]



[#G4]



[#G5]



[#G6]

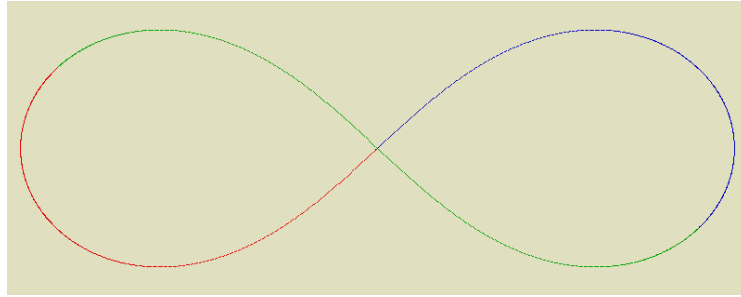
Die Diagramme #G5 und #G6 zeigen die Entwicklung von  $d_w$  bzw.  $d_{w(act)}$  bei verschiedenem Verhalten von  $\Delta t$  bei der Berechnung der ersten 10 Sek. des Pythagorasproblems. Die y-Achse ist logarithmisch eingeteilt. Auf der x-Achse ist die Rechenzeit des Computers angegeben, sie reicht von 60 Sek. bis 10 Sek. Wie erwartet steigt die Abweichung mit kleinerer Rechenzeit, da  $\Delta t$  hier größer ist. In #G5 beträgt die Abweichung für  $\Delta t = \text{konstant}$  stets 100% (Werte größer als 100% wurden als 100% angegeben); die Kurven von  $\Delta t$  proportional zu  $r^2$  und  $\Delta t$  proportional zu  $(1/a)$  liegen nahezu aufeinander.

Sehr interessant ist hier, dass bei #G5 die Berechnung mit  $\Delta t$  proportional zu  $r$  eine viel größere Abweichung hat als  $\Delta t$  proportional zu  $r^2$  und  $\Delta t$  proportional zu  $(1/a)$ . Bei #G6 hat  $\Delta t$  proportional zu  $r$  jedoch eine kleinere Abweichung als die anderen beiden. Hier widersprechen sich also die Aussagen von  $d_w$  und  $d_{w(act)}$ .

Jedoch geht aus beiden Diagrammen eindeutig hervor, dass die in 3.5. genannten Methoden die Rechengenauigkeit erhöhen.

#### 4.2.2.2.2. 8er Bahn





[#G1]

Als ich in #Q10 (S. 15-24) von einer neuentdeckten periodischen Lösung des Dreikörperproblems, bei der sich die Körper auf einer 8 bewegen (#G1), erfuhr, beschaffte ich mir von #Q11 die entsprechenden Daten:

$$x_1=0,97000436\text{m}; x_2=0,97000436\text{m}; x_3=0\text{m};$$

$$y_1=-0,24308753\text{m}; y_2=0,24308753\text{m}; y_3=0\text{m};$$

$$v_{x1}=0,466203685 \frac{m}{s}; v_{x2}=0,466203685 \frac{m}{s}; v_{x3}=-0,93240737 \frac{m}{s};$$

$$v_{y1}=0,43236573 \frac{m}{s}; v_{y2}=0,43236573 \frac{m}{s}; v_{y3}=-0,86473146 \frac{m}{s};$$

$$m_1=m_2=m_3=\frac{1}{G} m^3 s^{-2}$$

Zu diesem Beispiel habe ich aus Platzgründen keine weiteren Grafiken oder Tabellen eingebaut. #G13 zeigt aber auch, dass ORBITER 2D prinzipiell korrekt funktioniert.

#### 4.2.2.2.3. Sonnensystem



[#G1]

	Planet	Referenz[m]	Berechnet[m]	Differenz[m]	Entfernung[m]	Dif./r[%]	Gesamt[%]
X	Merkur	$2,86 \cdot 10^{10}$	$2,83 \cdot 10^{10}$	$3 \cdot 10^8$	$6,61 \cdot 10^{10}$	0,454	0,605
Y		$-5,13 \cdot 10^{10}$	$-5,14 \cdot 10^{10}$	$1 \cdot 10^8$		0,151	
Z		$-3,04 \cdot 10^{10}$	$-3,04 \cdot 10^{10}$	0		0	
X	Venus	$2,35 \cdot 10^{10}$	$2,51 \cdot 10^{10}$	$1,6 \cdot 10^9$	$1,09 \cdot 10^{11}$	1,47	1,83
Y		$-9,64 \cdot 10^{10}$	$-9,60 \cdot 10^{10}$	$4 \cdot 10^8$		0,367	
Z		$-4,48 \cdot 10^{10}$	$-4,48 \cdot 10^{10}$	0		0	
X	Erde	$-4,44 \cdot 10^{10}$	$-4,60 \cdot 10^{10}$	$1,6 \cdot 10^9$	$1,47 \cdot 10^{11}$	1,09	1,9
Y		$1,29 \cdot 10^{11}$	$1,28 \cdot 10^{11}$	$1 \cdot 10^9$		0,68	
Z		$5,58 \cdot 10^{10}$	$5,56 \cdot 10^{10}$	$2 \cdot 10^8$		0,136	
X	Mars	$4,6 \cdot 10^{10}$	$4,72 \cdot 10^{10}$	$1,2 \cdot 10^9$	$2,14 \cdot 10^{11}$	0,561	1,07
Y		$-1,9 \cdot 10^{11}$	$-1,89 \cdot 10^{11}$	$1 \cdot 10^9$		0,467	
Z		$-8,82 \cdot 10^{10}$	$-8,81 \cdot 10^{10}$	$1 \cdot 10^8$		0,0467	
X	Jupiter	$-6,96 \cdot 10^{11}$	$-6,95 \cdot 10^{11}$	$1 \cdot 10^9$	$8,15 \cdot 10^{11}$	0,123	0,245
Y		$-3,95 \cdot 10^{11}$	$-3,96 \cdot 10^{11}$	$1 \cdot 10^9$		0,123	
Z		$-1,52 \cdot 10^{11}$	$-1,52 \cdot 10^{11}$	0		0	
X	Saturn	$1,28 \cdot 10^{12}$	$1,29 \cdot 10^{12}$	$1 \cdot 10^{10}$	$1,46 \cdot 10^{12}$	0,685	0,685
Y		$-6,24 \cdot 10^{11}$	$-6,24 \cdot 10^{11}$	0		0	
Z		$-3,13 \cdot 10^{11}$	$-3,13 \cdot 10^{11}$	0		0	
X	Uranus	$1,11 \cdot 10^{12}$	$1,12 \cdot 10^{12}$	$1 \cdot 10^{10}$	$2,93 \cdot 10^{12}$	0,341	0,341
Y		$-2,48 \cdot 10^{12}$	$-2,48 \cdot 10^{12}$	0		0	
Z		$-1,1 \cdot 10^{12}$	$-1,1 \cdot 10^{12}$	0		0	
X	Neptun	$1,61 \cdot 10^{12}$	$1,62 \cdot 10^{12}$	$1 \cdot 10^{10}$	$3,38 \cdot 10^{12}$	0,296	0,296
Y		$-3,89 \cdot 10^{12}$	$-3,89 \cdot 10^{12}$	0		0	
Z		$-1,63 \cdot 10^{12}$	$-1,63 \cdot 10^{12}$	0		0	
X	Pluto	$-2,42 \cdot 10^{12}$	$-2,42 \cdot 10^{12}$	0	$4,45 \cdot 10^{12}$	0	0
Y		$-3,71 \cdot 10^{12}$	$-3,71 \cdot 10^{12}$	0		0	
Z		$-4,28 \cdot 10^{11}$	$-4,28 \cdot 10^{11}$	0		0	

[#T1]

#G1 zeigt die Simulation unseres Sonnensystems innerhalb eines Intervalls von ca. 10 Jahren (21.01.1984 bis 08.01.1994). Die entsprechenden Daten für Masse, Position und Geschwindigkeit stammen aus #Q13 und #Q14. Sie wurden mir freundlicherweise von Sebastian Naumann zugeschickt.

Tabelle #T1 zeigt eine Gegenüberstellung der von ORBITER 3D berechneten Positionen der Planeten am 08.01.1994 und deren Position laut #Q14. Diese Daten sind auf drei signifikante Stellen gerundet. Diese Genauigkeit reicht zwar nicht für weitere Vergleiche aus, aber sie vermittelt dennoch einen Überblick über die Fähigkeiten von ORBITER 3D. Die Position jedes Planeten ist in x-, y-, und z-Koordinaten unterteilt. Die Differenz der berechneten Daten und der Referenzwerte wird in der entsprechenden Spalte angegeben. Um einen objektiven Wert zu haben, ist in der Spalte Dif./r der Quotient aus Abweichung und momentaner Entfernung des jeweiligen Planeten zur Sonne angegeben. Die letzte Spalte gibt die gesamte prozentuale Abweichung eines Planeten an. Diese ergibt sich, indem man die Summe der Differenzen durch die Entfernung dividiert.

Diese Simulation arbeitete mit einem konstanten  $\Delta t = 1\text{s}$ . Aufgrund dieser kleinen Schrittweite war die notwendige Rechenzeit entsprechend groß, sie betrug ca. 11 Std. und 10 Min. Bei einer anderen Simulation mit  $\Delta t = 10\text{s}$  waren die meisten prozentualen Gesamtabweichungen ebenfalls in einer annehmbaren Größenordnung. Eine gravierende Ausnahme bildete allerdings Merkur, dessen Abweichung ca. 45% betrug.

### 4.2.3. Diskussion

Das Programm ORBITER hat zwar noch einige Mängel, wie z.B. Kompatibilitätsprobleme, jedoch werden die in der Einleitung gestellten Forderungen ausreichend erfüllt.

Es gibt vielfältige Möglichkeiten, diese Arbeit weiterzuführen:

Man könnte beispielsweise die Geschwindigkeit erhöhen, indem man das dritte Newtonsche Gesetz anwendet, welches besagt, dass die Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind. Somit müsste nur eine der beiden Kräfte berechnet werden. Eine weitere Möglichkeit wäre es, ein anderes Verfahren zur numerischen Integration zu benutzen (z.B. das Runge-Kutta-Verfahren). Eventuell werde ich noch eine Routine zur Überprüfung der Erhaltung des Gesamtimpulses einbauen, da entsprechende Abweichungen Anzeichen von Berechnungsfehler sind. Es gäbe auch die Möglichkeit, ORBITER so zu modifizieren, dass per Zufallsgenerator Körper erzeugt werden (mit zufälligen Massen, Positionen und Geschwindigkeiten). Deren Bewegung könnte es eine bestimmte Zeitlang simulieren, nach bestimmten Kriterien beurteilen und die Ergebnisse in eine Auswertungsdatei schreiben. So wäre es beispielsweise möglich, eine Statistik zu erstellen, in wieviel Prozent der Fälle der Körper mit der kleinsten Masse ins Unendliche flieht und wie oft dies ein anderer Körper tut.

## 5. Danksagung

An dieser Stelle möchte ich meinem Lehrer Karl Heinz Selbach danken, der mich bei dieser Arbeit betreut hat. Ganz besonders möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mir wegen meiner Handgelenksprobleme beim Schreiben des Programms und beim Tippen dieser Arbeit geholfen haben.

Weitere Personen, bei denen ich mich bedanken möchte, sind Philipp Wilking, da er mir beim Korrekturlesen geholfen hat, Fabian Bieler wegen unserer Diskussionen über Bewegungsvorgänge in  $\mathbb{S}^3$ , Kai Märzhäuser, weil er mir den Artikel über die 8er-Bahn gezeigt hat, Isaac Newton für seine Bewegungsgleichungen, Sid Meier für Civilization, Slartibartfast für Norwegen und natürlich der ganzen **CHAOS11!!!**

## 6. Literaturverzeichnis

#Q1 Müller, Michael: Numerische Lösung von Mehrkörperproblemen  
Jugend forscht - Arbeit (2001)  
<http://www.physiksammlung.de/>

#Q2 KUHN Physik  
Band III Mechanik  
Georg Westermann Verlag, Braunschweig 1973  
ISBN: 3-14-151971-4

#Q3 Bronstein, I. N. und Semendjajew, K. A.: Taschenbuch der Mathematik  
Verlag Harri Deutsch  
1965

#Q4 Wolf, Georg: Handbuch der Schulmathematik  
Hannover 1967

#Q5 Nientiedt, Marcus: Zum 2-Körper-Problem – Erläuterungen  
<http://www.uni-muenster.de/Physik/DP/2k/2k.htm>

#Q6 <http://www.freepascal.org/>

#Q7 GraphiX-Bibliothek (Copyright (c) 1999-2000 Michael Knapp)  
<http://programmierer.freepage.de/graphix/>

#Q8 GNU GENERAL PUBLIC LICENSE Version 2, June 1991  
(Copyright (C) 1989, 1991 Free Software Foundation, Inc.)  
675 Mass Ave, Cambridge, MA 02139, USA

#Q9 Donham, Silas Barss: Euler Method Simulation of Gravitational Interactions  
<http://aci.mta.ca/TheUmbrella/Physics/P3401/Investigations/EulerSimulationSBD.html>

#Q10 Stabile Dreierbeziehung  
Spektrum der Wissenschaft, November 2000

#Q11 Montgomery, Richard: A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses  
<http://orca.ucsc.edu/~rmont/>

#Q12 Marchal, Christian: Studies in Astronautics Volume 4: The Three-Body Problem  
Elsevier Science Publishers B.V.  
1990  
ISBN 0-444-87440-2

#Q13 The Astronomical Almanac for the year 1984  
Washington, London 1983

#Q14 The Astronomical Almanac for the year 1994  
Washington, London 1993

#Q15 Knerr, Richard: Knaurs Buch der Mathematik  
Droemersch Verlagsanstalt  
ISBN: 3-426-26407-2

## 7. Anhang

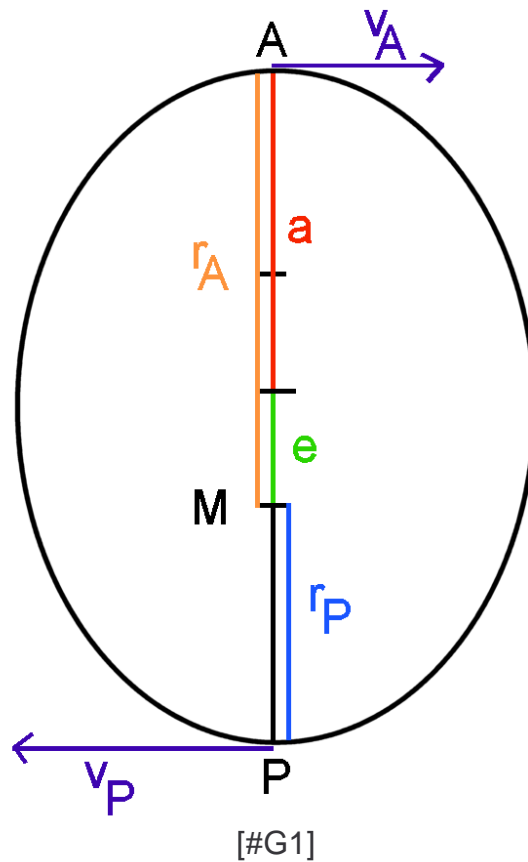
### 7.1. Weitere Beweise und Herleitungen

#### 7.1.1. Gesamtenergie auf einer Ellipsenbahn

Dieser Beweis zeigt, dass die Gesamtenergie  $W_{ges}$  auf einer Ellipse

$$= -\frac{1}{2} * G * m * M * \frac{1}{a} \text{ ist.}$$

( $G$  = Gravitationskonstante;  $a$  = große Halbachse;  $M$  = felderzeugende Masse;  $m$  = Probemasse)



$v_A$  ist die Geschwindigkeit im Aphel

$v_P$  ist die Geschwindigkeit im Perihel

$r_A$  ist die Entfernung im Aphel à #E1:  $r_A = a + e$

$r_P$  ist die Entfernung im Perihel à #E2:  $r_P = a - e$

#E3:  $W_{kin} = \frac{1}{2} * m * v^2$

#E4:  $W_{pot} = -G * m * M * \frac{1}{r}$

#E5:  $W_{ges} = W_{kin} + W_{pot}$

#E6:  $W_{kin_P} + W_{pot_P} = W_{kin_A} + W_{pot_A}$  | Energiesatz

$$\#E3: \text{ und } \#E4: \text{ in } \#E6: \hat{=} \#E7: \frac{1}{2} * m * v_P^2 - G * m * M * \frac{1}{r_P} = \frac{1}{2} * m * v_A^2 - G * m * M * \frac{1}{r_A}$$

$$\#E8: \frac{1}{2} * v_P^2 - G * M * \frac{1}{r_P} = \frac{1}{2} * v_A^2 - G * M * \frac{1}{r_A}$$

$$\#E9: \frac{1}{2} * v_P * r_P = \frac{1}{2} * v_A * r_A \quad | \text{ zweites Kepler-Gesetz (Flächensatz)}$$

$$\#E10: v_A = v_P * \frac{r_P}{r_A}$$

$$\#E10: \text{ in } \#E8: \hat{=} \#E11: \frac{1}{2} * v_P^2 - G * M * \frac{1}{r_P} = \frac{1}{2} * \left( v_P * \frac{r_P}{r_A} \right)^2 - G * M * \frac{1}{r_A}$$

$$\#E12: v_P^2 - v_P^2 * \frac{r_P^2}{r_A^2} = 2 * G * M * \frac{1}{r_P} - 2 * G * M * \frac{1}{r_A}$$

$$\#E13: v_P^2 * \left( 1 - \frac{r_P^2}{r_A^2} \right) = 2 * G * M * \left( \frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$\#E14: v_P^2 * \left( \frac{r_A^2 + r_P^2}{r_A^2} \right) = 2 * G * M * \frac{r_A - r_P}{r_A * r_P}$$

$$\#E15: v_P^2 = 2 * G * M * \frac{r_A^2 * (r_A - r_P)}{r_A * r_P * (r_A^2 + r_P^2)}$$

$$\#E1 \text{ und } \#E2 \text{ in } \#E15 \hat{=} \#E16: v_P^2 = 2 * G * M * \frac{(a+e)^2 * ((a+e) - (a-e))}{(a+e) * (a-e) * ((a+e)^2 + (a-e)^2)}$$

$$\#E17: v_P^2 = 2 * G * M * \frac{2 * e * (a+e)}{(a-e) * ((a^2 + 2 * a * e + e^2) + (a^2 - 2 * a * e + e^2))}$$

$$\#E18: v_P^2 = 2 * G * M * \frac{2 * e * (a+e)}{4 * a * e * (a-e)}$$

$$\#E19: v_P^2 = G * M * \frac{a+e}{a * (a-e)}$$

$$\#E20: W_{ges} = W_{kin_P} + W_{pot_P}$$

$$\#E3 \text{ und } \#E4 \text{ in } \#E20 \rightarrow \#E21: W_{ges} = \frac{1}{2} * m * v_P^2 - G * m * M * \frac{1}{r_P}$$

$$\#E2 \text{ und } \#E19 \text{ in } \#E21 \rightarrow \#E22: W_{ges} = \frac{1}{2} * m * G * M * \frac{a+e}{a*(a-e)} - G * m * M * \frac{1}{a-e}$$

$$\#E23: W_{ges} = G * m * M * \left( \frac{a+e}{2a*(a-e)} - \frac{1}{a-e} \right)$$

$$\#E24: W_{ges} = G * m * M * \left( \frac{a+e-2a}{2a*(a-e)} \right)$$

$$\#E25: W_{ges} = G * m * M * \left( \frac{e-a}{2a*(a-e)} \right)$$

$$\#E26: W_{ges} = G * m * M * \left( \frac{e-a}{2a*(a-e)} \right)$$

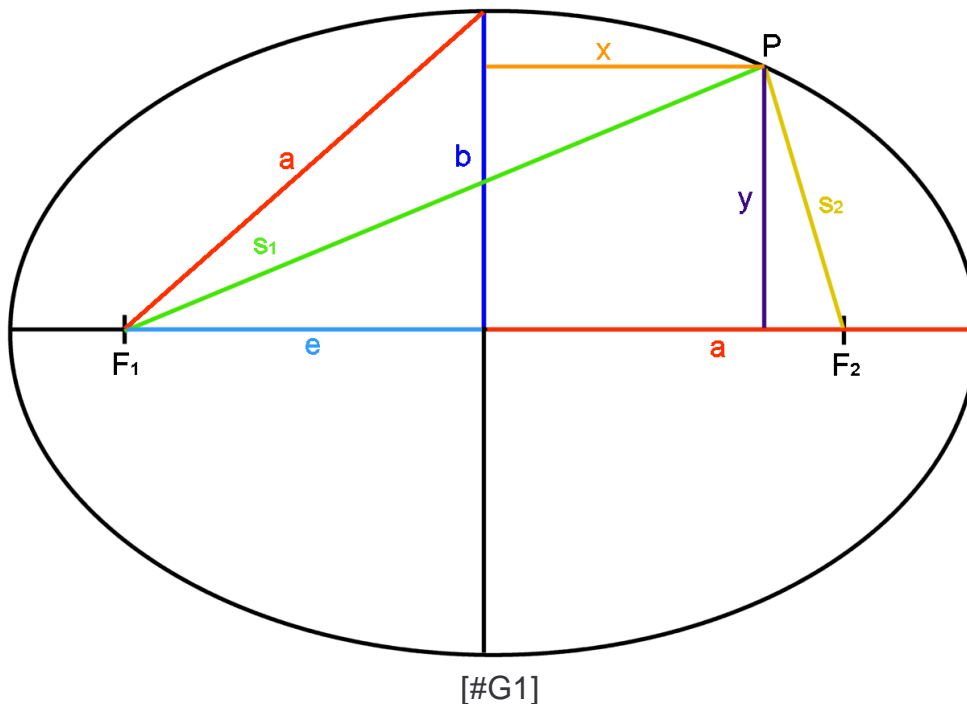
$$\#E27: W_{ges} = G * m * M * \left( \frac{-1*(a-e)}{2a*(a-e)} \right)$$

$$\#E28: W_{ges} = -\frac{1}{2} * G * m * M * \frac{1}{a}$$

## 7.1.2. Entfernungssumme und Tangentenwinkel

### 1. Entfernungssumme:

Dieser Beweis zeigt, dass die Summe  $s$  der Entfernungen eines beliebigen Punktes  $P$  einer Ellipse zu den beiden Brennpunkten stets  $2a$  beträgt.  
(Dies erfolgt in Anlehnung an #Q15.)



Wir wählen einen beliebigen Punkt P der Ellipse, dieser hat die Koordinaten x und y. Laut #G1 gilt dann für die Brennstrahlen (die Position der Brennpunkte ist so definiert, dass  $a^2 = b^2 + e^2$  gilt):

$$\text{\#E1: } s_1^2 = (e + x)^2 + y^2$$

und

$$\text{\#E2: } s_2^2 = (e - x)^2 + y^2$$

Γ  
Einschub1:

Für einen Kreis mit dem Radius a gilt:

$$\text{\#E3: } x^2 + y^2 = a^2$$

Da man eine Ellipse als einen entlang der Geraden durch die Brennpunkte gestreckten Kreis auffassen kann, gilt (mit k als Streckfaktor):

$$\text{\#E4: } x^2 + \left(\frac{y}{k}\right)^2 = a^2$$

$$\text{\#E5: } \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a \cdot k}\right)^2 = 1$$

Da  $b = a \cdot k$  gilt, folgt:



$$\#E6: \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$\#E7: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Da (laut der Definition von e)  $b^2 = a^2 - e^2$  gilt, folgt:

$$\#E8: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1$$

L

Weiterhin erfüllt P die Ellipsengleichung (siehe #E8):

$$\#E9: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1$$

$$\#E10: y^2 = a^2 - e^2 - \frac{x^2 * (a^2 - e^2)}{a^2}$$

$$\#E11: y^2 = a^2 - e^2 - x^2 * \left(1 - \frac{e^2}{a^2}\right)$$

$$\#E11 \text{ in } \#E1 \rightarrow \#E12: s_1^2 = (e + x)^2 + a^2 - e^2 - x^2 * \left(1 - \frac{e^2}{a^2}\right)$$

$$\#E13: s_1^2 = e^2 + 2 * e * x + x^2 + a^2 - e^2 - x^2 + x^2 * \frac{e^2}{a^2}$$

$$\#E14: s_1^2 = a^2 + 2 * e * x + x^2 * \frac{e^2}{a^2}$$

$$\#E15: s_1^2 = \left(a + x * \frac{e}{a}\right)^2$$

Da wir einen positiven Wert für die Streckenlänge  $s_1$  suchen, wählen wir hier:

$$\#E16: s_1 = a + x * \frac{e}{a}$$

$$\#E11 \text{ in } \#E2 \rightarrow \#E17: s_2^2 = (e - x)^2 + a^2 - e^2 - x^2 * \left(1 - \frac{e^2}{a^2}\right)$$

$$\text{\#E18: } s_2^2 = e^2 - 2 * e * x + x^2 + a^2 - e^2 - x^2 + x^2 * \frac{e^2}{a^2}$$

$$\text{\#E19: } s_2^2 = a^2 - 2 * e * x + x^2 * \frac{e^2}{a^2}$$

$$\text{\#E20: } s_2^2 = \left( a - x * \frac{e}{a} \right)^2$$

Da wir einen positiven Wert für die Streckenlänge  $s_2$  suchen, wählen wir hier:

$$\text{\#E21: } s_2 = a - x * \frac{e}{a}$$

Für die Summe  $s$  der Brennstrahlen gilt:

$$\text{\#E22: } s = s_1 + s_2$$

$$\text{\#E16 und \#E21 in \#E22 à \#E23: } s = a + x * \frac{e}{a} + a - x * \frac{e}{a}$$

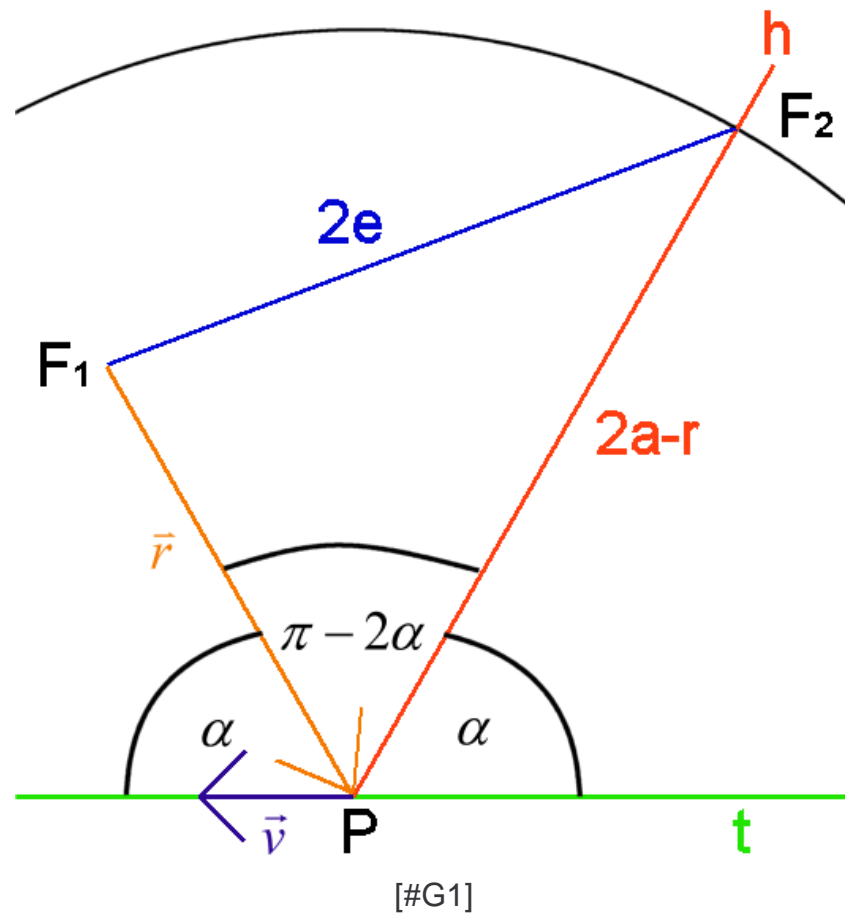
$$\text{\#E24: } s = 2 * a$$

## 2. Tangentenwinkel:

Dieser Beweis zeigt, dass die Tangente  $t$  an einen Punkt  $P$  einer Ellipse stets gleiche Winkel ( $\beta$  und  $\gamma$ ) mit den entsprechenden Brennstrahlen einschließt (also dass stets  $\beta = \gamma$  gilt).

(Dies erfolgt in Anlehnung an #Q15.)





### 1. Bedingung für die Existenz der Ellipse:

#E1:  $W_{kin} + W_{pot} < 0$

#E2:  $W_{kin} < -W_{pot}$

#E3:  $\frac{v^2}{2} < \frac{G * M}{r}$

### 2. Bestimmung der „Großen Halbachse“ a:

#E1:  $W_{ges} = W_{kin} + W_{pot}$

#E2:  $W_{ges} = \frac{1}{2} * m * v^2 - G * m * M * \frac{1}{r}$

Laut #E7.1.1.28 gilt aber auch:

#E3:  $W_{ges} = -\frac{1}{2} * G * m * M * \frac{1}{a}$

$$\#E3 = \#E2 \rightarrow \#E4: -\frac{1}{2} * G * m * M * \frac{1}{a} = \frac{1}{2} * m * v^2 - G * m * M * \frac{1}{r}$$

$$\#E5: G * M * \frac{1}{a} = \frac{2 * G * M - v^2 * r}{r}$$

$$\#E6: \frac{1}{a} = \frac{2 * G * M - v^2 * r}{G * M * r}$$

$$\#E7: a = \frac{G * M * r}{2 * G * M - v^2 * r}$$

### 3. Bestimmung der linearen Exzentrizität e:

Laut dem Cosinussatz gilt:

$$\#E8: (2 * e)^2 = r^2 + (2 * a - r)^2 - 2 * r * (2 * a - r) * \cos(\pi - 2 * \alpha)$$

Da  $\cos(\pi - \beta) = -\cos(\beta)$  folgt:

$$\#E9: (2 * e)^2 = r^2 + (2 * a - r)^2 - 2 * r * (2 * a - r) * (-\cos(2 * \alpha))$$

$$\#E10: 4 * e^2 = r^2 + 4 * a^2 - 4 * a * r + r^2 + (2 * r^2 - 4 * a * r) * (-\cos(2 * \alpha))$$

$$\#E11: e^2 = a^2 + \left( \frac{r^2}{2} - a * r \right) + \left( \frac{r^2}{2} - a * r \right) * (-\cos(2 * \alpha))$$

$$\#E12: e^2 = a^2 + \left( \frac{r^2}{2} - a * r \right) * (1 - \cos(2 * \alpha))$$

Da wir einen positiven Wert für e suchen, wählen wir hier:

$$\#E13: e = \sqrt{a^2 + \left( \frac{r^2}{2} - a * r \right) * (1 - \cos(2 * \alpha))}$$

### 4. Konstruktion des Zweiten Brennpunkts:

Der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  steht tangential auf der Ellipsenbahn. Laut 7.1.2. schließen die Brennstrahlen an einen Punkt P der Ellipse gleiche Winkel  $\alpha$  mit der Tangenten t an diesen Punkt ein. So lässt sich die (von P ausgehende) Halbgerade h konstruieren, die (entsprechend #G1) mit der Strecke r den Winkel  $\pi - 2\alpha$  und mit t den Winkel  $\alpha$  einschließt. Da, ebenfalls laut 7.1.2., die Summe der Entfernungen zu den beiden Brennpunkten für jeden Punkt einer Ellipse 2a beträgt, schneidet der Kreis um P mit dem Radius 2a-r die Halbgerade h in F<sub>2</sub>.

#### 7.1.4. Beweis, dass sich #E2.3.1.24 und #E2.3.2.21 entsprechen

Gleichung #E2.3.2.21 lautet:

$$\#E1: t = \sqrt{\frac{d^3}{2 * G * M}} * \left[ \arctan \sqrt{\left(\frac{d}{r} - 1\right)} + \frac{r}{d} * \sqrt{\left(\frac{d}{r} - 1\right)} \right]$$

┐  
Einschub 1:

es gilt:

$$\#E2: (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

weiterhin gilt

$$\#E3: \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\#E4: \tan \alpha * \cos \alpha = \sin \alpha$$

$$\#E4 \text{ in } \#E2 \rightarrow \#E5: (\tan \alpha)^2 * (\cos \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

$$\#E6: (\tan \alpha)^2 + 1 = \frac{1}{(\cos \alpha)^2}$$

$$\#E7: (\cos \alpha)^2 = \frac{1}{(\tan \alpha)^2 + 1}$$

hier gilt:

$$\#E8: \alpha = \arctan \sqrt{\frac{d}{r} - 1}$$

$$\#E8 \text{ in } \#E7 \rightarrow \#E9: \left( \cos \left( \arctan \sqrt{\frac{d}{r} - 1} \right) \right)^2 = \frac{1}{\left( \tan \left( \arctan \sqrt{\frac{d}{r} - 1} \right) \right)^2 + 1}$$

$$\#E10: \left( \cos \left( \arctan \sqrt{\frac{d}{r} - 1} \right) \right)^2 = \frac{1}{\frac{d}{r} - 1 + 1}$$

$$\#E11: \left( \cos \left( \arctan \sqrt{\frac{d}{r} - 1} \right) \right)^2 = \frac{r}{d}$$

$$\#E12: \cos \left( \arctan \sqrt{\frac{d}{r} - 1} \right) = \pm \sqrt{\frac{r}{d}}$$

da  $D = \{0..d\}$  der Definitionsbereich für  $r$  ist,

$$\text{folgt } 0 \leq \sqrt{\frac{d}{r} - 1} \leq \infty,$$

da  $W = \left\{0..\frac{\pi}{2}\right\}$  der Wertebereich von  $\arctan x$  für  $0 \leq x \leq \infty$  ist,

$$\text{folgt } 0 \leq \arctan \sqrt{\frac{d}{r} - 1} \leq \frac{\pi}{2},$$

da  $W = \{0..1\}$  der Wertebereich von  $\cos \alpha$  für  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  ist,

$$\text{folgt } 0 \leq \cos \left( \arctan \sqrt{\frac{d}{r} - 1} \right) \leq 1,$$

da weiterhin  $R_0^+$  der Wertebereich von  $\sqrt{\frac{r}{d}}$  ist (da  $r$  und  $d$  reell sind),  
wählen wir:

$$\#E13: \cos \left( \arctan \sqrt{\frac{d}{r} - 1} \right) = + \sqrt{\frac{r}{d}}$$

$$\#E14: \arctan \sqrt{\frac{d}{r} - 1} = \arccos \sqrt{\frac{r}{d}}$$

L

$$\#E14 \text{ in } \#E1 \text{ à } \#E15: t = \sqrt{\frac{d^3}{2 * G * M}} * \left[ \arccos \sqrt{\frac{r}{d}} + \frac{r}{d} * \sqrt{\left(\frac{d}{r} - 1\right)} \right]$$

$$\#E16: t = d * \sqrt{\frac{d}{2 * G * M}} * \frac{\frac{d}{2 * \sqrt{\frac{2 * G * M}{d}}}}{\frac{d}{2 * \sqrt{\frac{2 * G * M}{d}}}} * \left[ \arccos \sqrt{\frac{r}{d}} + \frac{r}{d} * \sqrt{\left(\frac{d}{r} - 1\right)} \right]$$

$$\text{\#E17: } t = \frac{d}{2 * \sqrt{\frac{2 * G * M}{d}}} * 2 * \sqrt{\frac{2 * G * M}{d}} * \sqrt{\frac{d}{2 * G * M}} * \left[ \arccos \sqrt{\frac{r}{d}} + \frac{r}{d} * \sqrt{\left(\frac{d}{r} - 1\right)} \right]$$

$$\text{\#E18: } t = \frac{d}{2 * \sqrt{\frac{2 * G * M}{d}}} * \left[ 2 * \arccos \sqrt{\frac{r}{d}} + 2 * \frac{r}{d} * \sqrt{\left(\frac{d}{r} - 1\right)} \right]$$

$$\text{\#E19: } t = \frac{d}{2 * \sqrt{\frac{2 * G * M}{d}}} * \left[ 2 * \arccos \sqrt{\frac{r}{d}} + 2 * \frac{r}{d} * \sqrt{\left(\frac{d-r}{r}\right)} \right]$$

$$\text{\#E20: } t = \frac{d}{2 * \sqrt{\frac{2 * G * M}{d}}} * \left[ 2 * \arccos \sqrt{\frac{r}{d}} + \sqrt{\left(\frac{4 * r^2 * d - 4 * r^3}{d^2 * r}\right)} \right]$$

$$\text{\#E21: } t = \frac{d}{2 * \sqrt{\frac{2 * G * M}{d}}} * \left[ 2 * \arccos \sqrt{\frac{r}{d}} + \sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{4 * r * d - 4 * r^2}{d^2}\right)\right)} \right]$$

$$\text{\#E22: } t = \frac{d}{2 * \sqrt{\frac{2 * G * M}{d}}} * \left[ 2 * \arccos \sqrt{\frac{r}{d}} + \sqrt{\left(1 - \left(1 - 2 * \frac{2 * r}{d} + \frac{4 * r^2}{d^2}\right)\right)} \right]$$

laut Binomen:

$$\text{\#E23: } t = \frac{d}{2 * \sqrt{\frac{2 * G * M}{d}}} * \left[ 2 * \arccos \sqrt{\frac{r}{d}} + \sqrt{\left(1 - \left(1 - \frac{2 * r}{d}\right)^2\right)} \right]$$

$$\text{\#E24: } t = \frac{d}{2 * \sqrt{\frac{2 * G * M}{d}}} * \left[ 2 * \arccos \sqrt{\frac{r}{d}} + \sqrt{\left(1 - \left(\frac{d - 2 * r}{d}\right)^2\right)} \right]$$

┐  
Einschub 2:

laut #Q3 S.156 gilt folgendes Additionstheorem:

$$\text{\#E25: } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha * \cos \beta - \sin \alpha * \sin \beta$$



für  $\alpha = \beta$  folgt:

$$\#E26: \cos(2 * \alpha) = (\cos \alpha)^2 - (\sin \alpha)^2$$

es gilt:

$$\#E27: (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

$$\#E28: (\sin \alpha)^2 = 1 - (\cos \alpha)^2$$

$$\#E28 \text{ in } \#E26 \rightarrow \#E29: \cos(2 * \alpha) = (\cos \alpha)^2 - 1 + (\cos \alpha)^2$$

$$\#E29: \cos(2 * \alpha) = 2 * (\cos \alpha)^2 - 1$$

$$\#E30: 2 * \alpha = \arccos(2 * (\cos \alpha)^2 - 1)$$

für  $\alpha = \arccos x$  folgt:

$$\#E31: 2 * \arccos x = \arccos(2 * (\cos(\arccos x))^2 - 1)$$

$$\#E32: 2 * \arccos x = \arccos(2 * x^2 - 1)$$

$$\#E33: 2 * \arccos x = \arccos(-(1 - 2 * x^2))$$

$$\#E34: 2 * \arccos x = \arccos(-\cos(\arccos(1 - 2 * x^2)))$$

da  $-\cos \beta = \cos(\pi - \beta)$  folgt:

$$\#E35: 2 * \arccos x = \arccos(\cos(\pi - \arccos(1 - 2 * x^2)))$$

$$\#E36: 2 * \arccos x = \pi - \arccos(1 - 2 * x^2)$$

für  $x = \sqrt{\frac{r}{d}}$  folgt:

$$\#E37: 2 * \arccos \sqrt{\frac{r}{d}} = \pi - \arccos\left(1 - 2 * \frac{r}{d}\right)$$

$$\#E38: 2 * \arccos \sqrt{\frac{r}{d}} = \pi - \arccos\left(\frac{d - 2 * r}{d}\right)$$

L

$$\#E38 \text{ in } \#E24 \text{ à } \#E39: t = \frac{d}{2 * \sqrt{\frac{2 * G * M}{d}}} * \left[ \pi - \arccos\left(\frac{d - 2 * r}{d}\right) + \sqrt{1 - \left(\frac{d - 2 * r}{d}\right)^2} \right]$$

Gleichung #E38 ist identisch mit Gleichung #E2.3.1.24. ( $t'$  aus #E2.3.1.24 entspricht  $t$  #E38)

Damit ist bewiesen, dass 2.3.1. und 2.3.2. zu äquivalenten Lösungen führen.

## 7.2. Zahlenbeispiele und Graphen

### 7.2.1. Zahlenbeispiel zu 2.2.

Ein Körper startet zur Zeit  $t_0 = 0$  in der Entfernung  $r_p = 10^7 m$  zur Zentralmasse

$M = 10^{25} kg$ , die Anfangsgeschwindigkeit  $v_p = 10^4 \frac{m}{s}$  steht senkrecht auf  $\vec{r}_p$ . Der

Körper befindet sich im Perihel, daher gilt  $\varphi = 0$ .

Wo befindet sich der Körper nach  $t = 5000s$  ( $\varphi'$  und  $r'$ )?

#### 1. Schritt:

Laut #E7.1.3.7 gilt:

$$\#E1: a = \frac{G * M * r}{2 * G * M - v^2 * r}$$

mit  $M = 10^{25} kg$ ,  $r = r_p = 10^7 m$  und  $v = v_p = 10^4 \frac{m}{s}$  folgt:

$$\#E2: a \approx 1.995 * 10^7 m$$

#### 2. Schritt:

Wir können hier #E2.3.1.10 benutzen:

$$\#E3: T = \frac{2 * \pi * a}{\sqrt{G * \frac{M}{a}}}$$

mit  $M = 10^{25} kg$  und  $a$  folgt:

$$\#E4: T \approx 2.168 * 10^4 s$$

#### 3. Schritt:

Da der Körper im Perihel startet, gilt:

$$\text{\#E5: } e + r_p = a$$

$$\text{\#E6: } e = a - r_p$$

da  $e = \varepsilon * a$  folgt:

$$\text{\#E7: } \varepsilon = 1 - \frac{r_p}{a}$$

$$\text{\#E8: } \varepsilon \approx 0.4988$$

#### 4. Schritt:

Wir setzen  $T$ ,  $t$  und  $\varepsilon$  in #E2.2.8 ein und ermitteln  $\psi' = \psi$  numerisch (im Intervall von  $u$  bis  $2 * \pi$ ):

$$\text{\#E9: } \psi' \approx 1.918$$

#### 5. Schritt:

Mittels #E2.2.26 errechnen wir  $\varphi' = \varphi$ , indem wir  $\varepsilon$  und  $\psi = \psi'$  einsetzen :

$$\text{\#E10: } \varphi' \approx 2.371$$

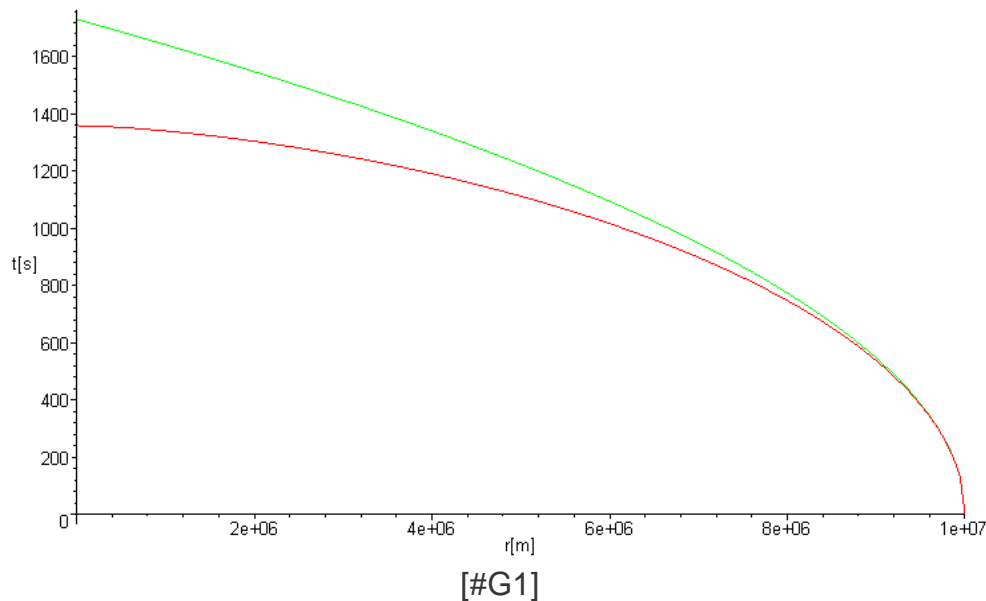
Mittels #E2.2.29 errechnen wir  $r' = r$ , indem wir  $\varepsilon$  und  $\psi = \psi'$  einsetzen :

$$\text{\#E11: } r' \approx 2.334 * 10^7 m$$

### **7.2.2. Graph zu 2.3.1.**

#G1 zeigt zwei Funktionen, die auf unterschiedliche Weise den Fall zweier Massepunkte (aufeinander zu) beschreiben (wobei die Masse des einen Körpers relativ zu der des anderen Körpers zu vernachlässigen ist). Die obere Funktion (grün) beschreibt den Bewegungsvorgang unter der Annahme, dass die Beschleunigung konstant sei und der Anfangsbeschleunigung entspräche. Die untere Funktion (rot) beschreibt den Bewegungsvorgang genauer, indem sie berücksichtigt, dass sich die Beschleunigung während des Falls ändert, sie entspricht #E2.3.1.24.

In diesem Beispiel wurden  $M = 10^{25} kg$  als Masse des Zentralkörpers und  $d = 10^7 m$  als Anfangsentfernung verwendet.



Auf der x-Achse ist der Abstand (in Metern), den die beiden Körper zueinander haben, angegeben. Auf der y-Achse ist die Zeit (in Sekunden) angegeben, die die Körper brauchen, um vom anfänglichen Abstand  $d$  in den entsprechenden neuen Abstand zu gelangen.

### 7.2.3. Zahlenbeispiel zu 2.3.2.

Ein Körper startet zur Zeit  $t_0 = 0$  aus der Ruhelage in der Entfernung  $d = 10^7 m$  zur Zentralmasse  $M = 10^{25} kg$ .

Wo befindet er sich nach  $t = 1000s$ ?

Hierzu setzen wir einfach  $M = 10^{25} kg$ ,  $t = 1000s$  und  $d = 10^7 m$  in #E2.3.2.21 ein, lösen numerisch nach  $r$  auf (im Intervall von 0 bis  $d$ ) und erhalten:

#E1:  $r \approx 6.156 \cdot 10^6 m$

### 7.2.4. Graphen zu 2.3.3.

#G1 zeigt 5 Graphen der Funktion #E2.3.3.31, die den Fall zweier Massepunkte (aufeinander zu) beschreibt (wobei die Masse des einen Körpers relativ zu der des anderen Körpers zu vernachlässigen ist). Der „leichtere“ Körper hat eine beliebig große Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ , welche direkt auf den anderen Körper hin gerichtet ist.

In diesem Beispiel wurden  $M = 10^{25} kg$  als Masse des Zentralkörpers und  $d = 10^7 m$  als Anfangsentfernung verwendet. Die 5 Graphen entsprechen laut der folgenden Auflistung (von oben nach unten) unterschiedlichen Werten von  $v_0$ :

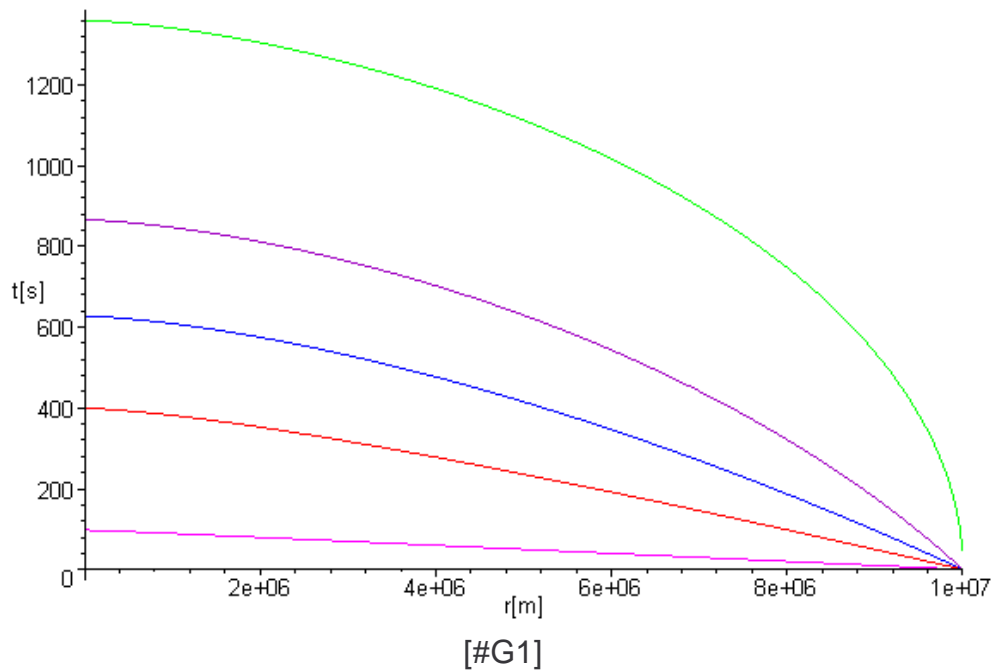
$$v_0 = 0 \frac{m}{s} \text{ (grün)}$$

$$v_0 = 5 \cdot 10^3 \frac{m}{s} \text{ (lila)}$$

$$v_0 = 10^4 \frac{m}{s} \text{ (blau)}$$

$$v_0 = 2 \cdot 10^4 \frac{m}{s} \text{ (rot)}$$

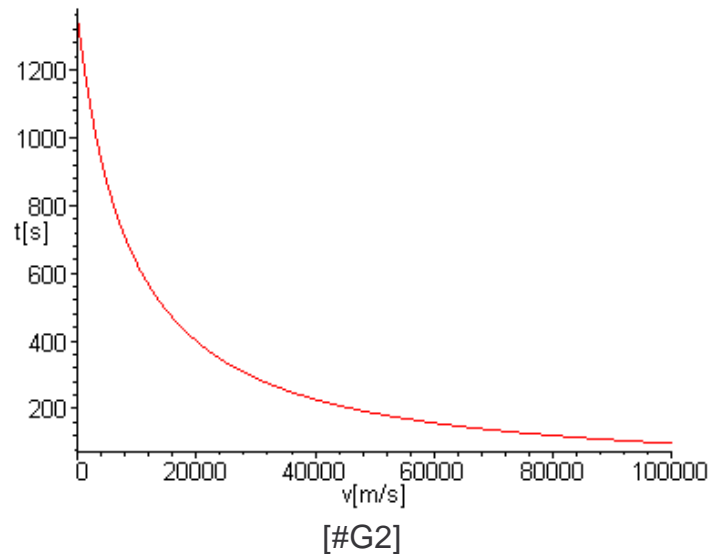
$$v_0 = 10^5 \frac{m}{s} \text{ (pink)}$$



Auf der x-Achse ist der Abstand (in Metern), den die beiden Körper zueinander haben, angegeben. Auf der y-Achse ist die Zeit (in Sekunden) angegeben, die die Körper brauchen, um vom anfänglichen Abstand  $d$  in den entsprechenden neuen Abstand zu gelangen.

#G2 zeigt den Graphen der Funktion #E2.3.3.31, wobei die Abhängigkeit der Fallzeit von der Anfangsgeschwindigkeit dargestellt wird.

In diesem Beispiel wurden  $M = 10^{25} \text{ kg}$  als Masse des Zentralkörpers,  $d = 10^7 \text{ m}$  als Anfangsentfernung und  $r = 0 \text{ m}$  als Endentfernung verwendet.



Auf der x-Achse ist die Anfangsgeschwindigkeit (in Metern pro Sekunde) angegeben. Auf der y-Achse ist die Zeit (in Sekunden) angegeben, nach der die beiden Körper den Abstand  $r = 0m$  haben.

### 7.2.5. Zahlenbeispiel zu 2.3.3.

Ein Körper startet zur Zeit  $t_0 = 0$  in der Entfernung  $d_1 = 10^7 m$  zur Zentralmasse

$M = 10^{25} kg$ , die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 10^4 \frac{m}{s}$  ist direkt auf die Zentralmasse

hin gerichtet. Nach welcher Zeit  $t$  erreicht der Körper die Entfernung  $d_2 = 5 * 10^6 m$  auf der anderen Seite der Zentralmasse?

(Dies geschieht unter der Voraussetzung, dass er die Zentralmasse unendlich nah passiert.)

#### 1. Schritt:

$t_1$  ist die Zeit die der Körper braucht, um von  $d_1$  zur Zentralmasse zu kommen

( $r = 0m$ ). Wir setzen  $M = 10^{25} kg$ ,  $v_0 = 10^4 \frac{m}{s}$ ,  $r = 0m$  und  $d = d_1 = 10^7 m$  in #E2.3.3.31 ein und erhalten:

#E1:  $t_1 \approx 627.5s$

(für  $r = 0m$  muss man einen Grenzwert bilden)

#### 2. Schritt:

Mit Hilfe des Energiesatzes ermitteln wir die Geschwindigkeit  $v_0'$  des Körpers bei  $d_2 = 5 * 10^6 m$ :

$$\#E2: \frac{1}{2} * v_0'^2 - G * M * \frac{1}{d_2} = \frac{1}{2} * v_0^2 - G * M * \frac{1}{d_1}$$

$$\#E3: v_0'^2 = v_0^2 - 2 * G * M * \frac{1}{d_1} + 2 * G * M * \frac{1}{d_2}$$

$$\#E4: v_0' = \pm \sqrt{v_0^2 - 2 * G * M * \frac{1}{d_1} + 2 * G * M * \frac{1}{d_2}}$$

da wir eine positive Geschwindigkeit wollen, wählen wir  $+\sqrt{\quad}$ :

$$\#E5: v_0' = + \sqrt{v_0^2 + 2 * G * M * \left( \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right)}$$

$$\#E6: v_0' \approx 15279 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### 3. Schritt:

$t_2$  ist die Zeit, die der Körper braucht, um von der Zentralmasse zu  $d_2$  zu kommen.  
 $t_2$  ist aber auch gleich der Zeit, die der Körper braucht, um von  $d_2$  zur Zentralmasse zu kommen ( $r = 0m$ ). Da wir laut #E6 die Geschwindigkeit bei  $d_2$  kennen, können wir  $t_2$  berechnen. Wir setzen  $M = 10^{25} \text{ kg}$ ,  $v_0 = v_0'$ ,  $r = 0m$  und  $d = d_2 = 5 * 10^6 m$  in #E2.3.3.1 ein und erhalten:

$$\#E7: t_2 \approx 212.3s$$

(für  $r = 0m$  muss man einen Grenzwert bilden)

### 4. Schritt:

Jetzt können wir die Zeit  $t$  berechnen, die sich aus  $t_1$  und  $t_2$  zusammensetzt:

$$\#E8: t = t_1 + t_2$$

$$\#E9: t \approx 840s$$

## **7.2.6. Zahlenbeispiel zu 3.3.1.**

Zwei Körper starten zur Zeit  $t_0 = 0$  aus der Ruhelage in der Entfernung  $d = 10^8 m$  zu einander. Ihre Massen lauten  $m_1 = 10^{24} \text{ kg}$  und  $m_2 = 10^{25} \text{ kg}$ .

Nach welcher Zeit  $t$  haben die beiden Körper nur noch den Abstand  $r = 2 * 10^7 m$ ?

Hierzu setzen wir einfach  $m_1 = 10^{24} \text{ kg}$ ,  $m_2 = 10^{25} \text{ kg}$ ,  $r = 2 \cdot 10^7 \text{ m}$  und  $d = 10^8 \text{ m}$  in #E3.3.1.17 ein und erhalten:

#E1:  $t \approx 3.934 \cdot 10^4 \text{ s}$

### 7.3. Handbuch (alle Kapitelangaben beziehen sich auf Unterkapitel dieses Kapitels)

#### Kurzhandbuch zu ORBITER 0.7.5 25.03.2001

1. Einleitung
2. Copyright
3. Interface
4. Menü
5. Tastaturbefehle
6. Logdatei

##### 1. Einleitung

ORBITER ist ein Mehrkörpersimulationsprogramm. Es berechnet die Bewegung von punktförmigen Massen in der Ebene und im Raum. Die Ergebnisse werden graphisch dargestellt. ORBITER wurde im Rahmen einer Jugend forscht-Arbeit entwickelt. Es besteht aus den zwei Hauptkomponenten ORBITER 2D und ORBITER 3D.

An verschiedenen Stellen des Programms gibt es die Möglichkeit, Daten einzugeben. Das kann in dezimaler Schreibweise (0.002) oder in exponentieller Schreibweise (2.000000000000000000E-0003) erfolgen.

Bei Fragen, Anregungen oder sonst irgend etwas: [orbiter@physiksammlung.de](mailto:orbiter@physiksammlung.de)

##### 2. Copyright

ORBITER Version 0.7.5 Copyright (C) 2000/2001 by Michael Müller

(zu beziehen bei <http://www.physiksammlung.de> bzw. <http://www.physiksammlung.de/orbiter/>)

ORBITER untersteht der GNU General Public License (siehe gpl.txt).

ORBITER benutzt die GraphiX-Bibliothek (Copyright (c) 1999-2000 Michael Knapp; contact: [mknapp@gmx.at](mailto:mknapp@gmx.at); zu beziehen bei <http://programmierer.freepage.de/graphix/>)

##### 3. Interface

ORBITER besitzt ein ausblendbares Interface, von dem man viele wichtige Daten ablesen kann. Dieses Interface besitzt bei ORBITER 2D 17 Elemente und bei ORBITER 3D 20 Elemente. Diese werden nun Zeile für Zeile, von links nach rechts, erläutert.

##### 3.1. ORBITER 2D

Zeile 1:

- berechnete Zeit des simulierten Mehrkörper-Systems (in Sekunden)
- aktueller Zeitschritt  $\Delta t$  (in Sekunden)
- bisherige Rechenzyklen
- Name des aktuellen Objekts
- Masse des aktuellen Objekts (in kg)

Zeile 2:

- x-Koordinate des zentrierten Punkts (in m)
- y-Koordinate des zentrierten Punkts (in m)
- Radius des aktuellen Objekts (ist immer 0, da die bisherige Version von ORBITER nur mit punktförmigen Massen rechnet)
- x-Koordinate des aktuellen Objekts (in m)
- y-Koordinate des aktuellen Objekts (in m)

Zeile 3:



- aktuelles  $d_{w(akt)}$  (in Prozent); dieser Wert gibt die Abweichung einer Größe namens „aktive Energie“ an
- aktuelles  $d_w$ ; dieser Wert gibt die prozentuale Abweichung der Gesamtenergie des Systems an
- Uhrzeit
- x-Komponente der Geschwindigkeit des aktuellen Objekts (in m/s)
- y-Komponente der Geschwindigkeit des aktuellen Objekts (in m/s)

Zeile 4:

- Ausgabefenster
- Eingabefenster

### 3.2. ORBITER 3D

Zeile 1:

- berechnete Zeit des simulierten Mehrkörper-Systems (in Sekunden)
- aktueller Zeitschritt  $\Delta t$  (in Sekunden)
- bisherige Rechenzyklen
- Name des aktuellen Objekts
- Masse des aktuellen Objekts (in kg)
- Radius des aktuellen Objekts (ist immer 0, da die bisherige Version von ORBITER nur mit punktförmigen Massen rechnet)

Zeile 2:

- x-Koordinate des zentrierten Punkts (in m)
- y-Koordinate des zentrierten Punkts (in m)
- z-Koordinate des zentrierten Punkts (in m)
- x-Koordinate des aktuellen Objekts (in m)
- y-Koordinate des aktuellen Objekts (in m)
- z-Koordinate des aktuellen Objekts (in m)

Zeile 3:

- aktuelles  $d_{w(akt)}$  (in Prozent); dieser Wert gibt die Abweichung einer Größe namens „aktive Energie“ an
- aktuelles  $d_w$ ; dieser Wert gibt die prozentuale Abweichung der Gesamtenergie des Systems an
- Uhrzeit
- x-Komponente der Geschwindigkeit des aktuellen Objekts (in m/s)
- y-Komponente der Geschwindigkeit des aktuellen Objekts (in m/s)
- z-Komponente der Geschwindigkeit des aktuellen Objekts (in m/s)

Zeile 4:

- Ausgabefenster
- Eingabefenster

## 4. Menü

ORBITER besitzt ein Menü-System, mit dem es möglich ist, eine Reihe von Optionen einzustellen.

### 4.1. ORBITER 2D

#### 4.1.1. Hauptmenü

- 'Simulation starten' / 'Simulation neustarten' – Starten/Neustarten der Simulation
- 'Simulation fortsetzen' – eine bereits gestartete Simulation fortsetzen
- 'Einstellungen' – siehe 4.1.2.
- 'ini laden' – Laden einer .ini Datei mit speziellen Optionseinstellungen
- 'ini speichern' – Speichern der aktuellen Optionen in einer .ini Datei
- 'Scenario Optionen' – siehe 4.1.3.
- 'Scenario Laden' – laden einer .scn Datei mit einem speziellen Scenario; eventuell auch Laden einer .sch Datei mit gespeicherten Punkten
- 'Scenario speichern' – Speichern des aktuellen Scenarios in einer .scn Datei; eventuell auch Speichern der berechneten Punkte aus dem

Screencache in einer .cch Datei

'Extras' – siehe 4.1.4.

'Hilfe' – siehe 4.1.5.

'Beenden' – Beenden des Programms

#### 4.1.2. Einstellungen

'Grafik' – siehe 4.1.6.

'Rechen-Optionen' – siehe 4.1.7.

'Energie-Optionen' – siehe 4.1.8.

'LOG-Datei' – siehe 4.1.9.

'Sonstiges' – siehe 4.1.10.

'zurück' – zurück zum Hauptmenü

#### 4.1.3. Scenario Optionen

'neues Scenario' – Erstellen eines neuen Scenarios mit Hilfe einer Eingabemaske:

##### Eingabemaske:

'Name' – Name des Objekts

'x[m]' – x-Koordinate in Metern

'y[m]' – y-Koordinate in Metern

'v\_x[m/s]' – x-Komponente der Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde

'v\_y[m/s]' – y-Komponente der Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde

'Masse[kg]' – Masse in Kilogramm

'color' – Farbe des Objekts als Wert zwischen 0 und 255

'Scenario bearbeiten' – Verändern der Objektdaten

'zurück' – zurück zum Hauptmenü

#### 4.1.4. Extras

'Colortable' – Anzeigen einer Farbtabelle mit den Farben von 0 bis 255

'zurück' – zurück zum Hauptmenü

#### 4.1.5. Hilfe

'Info' – Informationen über das Programm

'zurück' – zurück zum Hauptmenü

#### 4.1.6. Grafik

'Auflösung' – Einstellen der Bildschirmauflösung der Simulation (von 800x600 bis 1600x1200)

'bgcolor' – Einstellen der Hintergrundfarbe der Simulation als Wert zwischen 0 und 255

'Panel ist an' / 'Panel ist aus' – das Interface ein-/ausschalten

'All Pixel ist an' / 'All Pixel ist aus' – jeden berechneten Pixel anzeigen / 'Pixel pro Sekunde' beachten

'Pixel pro Sekunde' – Anzahl der Pixel, die pro (Scenario – interne) Sekunde angezeigt werden

'Show-Zyklus' – ein hoher Wert soll bei sehr schnellen Computern ein Flimmern des Interface vermindern

'zurück' – zurück zu den Einstellungen

#### 4.1.7. Rechen-Optionen

'dt=const' / 'dt proportional zu r' / 'dt proportional zu  $r^2$ ' / 'dt proportional zu  $(1/a)$ ' – Zeitschritt dt ist konstant / ist proportional zum kleinsten Abstand zweier Körper / ist proportional zum Quadrat des kleinsten Abstand zweier Körper / ist antiproportional zur größten im System auftretenden Beschleunigung

'Spezialeingabe ist an' / 'Spezialeingabe ist aus' – Benutzung des jeweiligen Proportionalitätsfaktors / Benutzung von dt in Sekunden

'dt[s]' / 'TproR[s/m]' / 'TproR<sup>2</sup>[s/m<sup>2</sup>]' / 'TmultiA[m/s]' – Eingabe von dt in

Sekunden bzw. Eingabe  
des jeweiligen  
Proportionalitätsfaktors

'zurück' – zurück zu den Einstellungen

#### 4.1.8. Energie-Check

'W-Check ist an' / 'W-Check ist aus' – die Überprüfung der Energieabweichung  
wird benutzt / wird nicht benutzt

'W-Grenze(%)' – Angabe der Abweichung, bei der die Simulation stoppt

'W(act)-Check ist an' / 'W(act)-Check ist aus' – die Überprüfung der Abweichung  
der 'aktiven Energie' wird benutzt  
/ wird nicht benutzt

'W(act)-Grenze(%)' – Angabe der Abweichung, bei der die Simulation stoppt

'zurück' – zurück zu den Einstellungen

#### 4.1.9. LOG-Datei

'LOG an' / 'LOG aus' – Logdatei wird benutzt / wird nicht benutzt

'LOG all ist an' / 'LOG all ist aus' - jeden berechneten Datensatz speichern /  
'LOGs pro Sekunde' beachten

'LOGs pro Sekunde' - Anzahl der Datensätze, die pro (Scenario – interne)  
Sekunde gespeichert werden

'LOG-Style: complete' / 'LOG-Style: easy' – Datensätze werden mit maximaler  
Genauigkeit gespeichert /  
Datensätze werden mit geringerer  
Genauigkeit gespeichert

'LOG-Datei-Name' – Name der Logdatei

'zurück' – zurück zu den Einstellungen

#### 4.1.10. Sonstiges

'movestep[m]' – Größe eines Bewegungsschritts in Metern

'turnstep[rad]' – Größe einer Drehung im Bogenmaß

'zoom' – Zoomfaktor

'zurück' – zurück zu den Einstellungen

### 4.2. ORBITER 3D

#### 4.2.1. Hauptmenü

'Simulation starten' / 'Simulation neustarten' – Starten/Neustarten der Simulation

'Simulation fortsetzen' – eine bereits gestartete Simulation fortsetzen

'Einstellungen' – siehe 4.2.2.

'in3 laden' – Laden einer .in3 Datei mit speziellen Optionseinstellungen

'in3 speichern' – Speichern der aktuellen Optionen in einer .in3 Datei

'Scenario Optionen' – siehe 4.2.3.

'Scenario laden' – Laden einer .sc3 Datei mit einem speziellen Scenario; eventuell  
auch Laden einer .cc3 Datei mit gespeicherten Punkten

'Scenario speichern' – Speichern des aktuellen Scenarios in einer .sc3 Datei;  
eventuell auch Speichern der berechneten Punkte aus dem  
Screencache in einer .cc3 Datei

'Extras' – siehe 4.2.4.

'Hilfe' – siehe 4.2.5.

'Beenden' – Beenden des Programms

#### 4.2.2. Einstellungen

'Grafik' – siehe 4.2.6.

'Rechen-Optionen' – siehe 4.2.7.

'Energie-Optionen' – siehe 4.2.8.

'LOG-Datei' – siehe 4.2.9.

'Sonstiges' – siehe 4.2.10.

'zurück' – zurück zum Hauptmenü

#### 4.2.3. Scenario Optionen

'neues Scenario' – Erstellen eines neuen Scenarios mit Hilfe einer Eingabemaske:

**Eingabemaske:**

'Name' – Name des Objekts

'x[m]' – x-Koordinate in Metern

'y[m]' – y-Koordinate in Metern

'z[m]' – z-Koordinate in Metern

'v\_x[m/s]' – x-Komponente der Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde

'v\_y[m/s]' – y-Komponente der Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde

'v\_z[m/s]' – z-Komponente der Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde

'Masse[kg]' – Masse in Kilogramm

'color' – Farbe des Objekts als Wert zwischen 0 und 255

'Scenario bearbeiten' – Verändern der Objektdaten

'zurück' – zurück zum Hauptmenü

#### 4.2.4. Extras

'Colortable' – Anzeigen einer Farbtabelle mit den Farben von 0 bis 255

'zurück' – zurück zum Hauptmenü

#### 4.2.5. Hilfe

'Info' – Informationen über das Programm

'zurück' – zurück zum Hauptmenü

#### 4.2.6. Grafik

'Auflösung' – Einstellen der Bildschirmauflösung der Simulation (von 800x600 bis 1600x1200)

'bgcolor' – Einstellen der Hintergrundfarbe der Simulation als Wert zwischen 0 und 255

'Panel ist an' / 'Panel ist aus' – das Interface ein-/ausschalten

'All Pixel ist an' / 'All Pixel ist aus' – jeden berechneten Pixel anzeigen / 'Pixel pro Sekunde' beachten

'Pixel pro Sekunde' – Anzahl der Pixel, die pro (Scenario – interne) Sekunde angezeigt werden

'Show-Zyklus' – ein hoher Wert soll bei sehr schnellen Computern ein Flimmern des Interface vermindern

'zurück' – zurück zu den Einstellungen

#### 4.2.7. Rechen-Optionen

'dt=const' / 'dt proportional zu r' / 'dt proportional zu  $r^2$ ' / 'dt proportional zu  $(1/a)$ ' – Zeitschritt dt ist konstant / ist proportional zum kleinsten Abstand zweier Körper / ist proportional zum Quadrat des kleinsten Abstand zweier Körper / ist antiproportional zur größten im System auftretenden Beschleunigung

'Spezialeingabe ist an' / 'Spezialeingabe ist aus' – Benutzung des jeweiligen Proportionalitätsfaktors / Benutzung von dt in Sekunden

'dt[s]' / 'TproR[s/m]' / 'TproR<sup>2</sup>[s/m<sup>2</sup>]' / 'TmultiA[m/s]' – Eingabe von dt in Sekunden bzw. Eingabe des jeweiligen Proportionalitätsfaktors

'zurück' – zurück zu den Einstellungen

#### 4.2.8. Energie-Check

'W-Check ist an' / 'W-Check ist aus' – die Überprüfung der Energieabweichung wird benutzt / wird nicht benutzt

'W-Grenze(%)' – Angabe der Abweichung, bei der die Simulation stoppt

'W(act)-Check ist an' / 'W(act)-Check ist aus' – die Überprüfung der Abweichung der 'aktiven Energie' wird benutzt / wird nicht benutzt  
'W(act)-Grenze(%)' – Angabe der Abweichung, bei der die Simulation stoppt  
'zurück' – zurück zu den Einstellungen

#### 4.2.9. LOG-Datei

'LOG an' / 'LOG aus' – Logdatei wird benutzt / wird nicht benutzt  
'LOG all ist an' / 'LOG all ist aus' - jeden berechneten Datensatz speichern / 'LOGs pro Sekunde' beachten  
'LOGs pro Sekunde' - Anzahl der Datensätze, die pro (Scenario – interne) Sekunde gespeichert werden  
'LOG-Style: complete' / 'LOG-Style: easy' – Datensätze werden mit maximaler Genauigkeit gespeichert / Datensätze werden mit geringerer Genauigkeit gespeichert  
'LOG-Datei-Name' – Name der Logdatei  
'zurück' – zurück zu den Einstellungen

#### 4.2.10. Sonstiges

'movestep[m]' – Größe eines Bewegungsschritts in Metern  
'turnstep[rad]' – Größe einer Drehung im Bogenmaß  
'angle[rad]' – Öffnungswinkel der virtuellen Kamera (im Bogenmaß)  
'zurück' – zurück zu den Einstellungen

### 5. Tastaturbefehle

Während der Simulation eines Systems gibt es eine Reihe möglicher Tastaturbefehle. Diese sind im Folgenden aufgelistet.

#### 5.2. ORBITER 2D

'Esc' - Menü  
'c' - clear screen  
's' - start/stop  
'r' - restart  
'o' - Objekt zentrieren [z.B.: '1' für Objekt1]  
'v' - Informationen über Objekt [z.B.: '1' für Objekt1]  
'p' - Informationsleiste an/aus  
'b' - Bildschirminhalt in bmp-Datei speichern  
'-' - verkleinern  
'+' - vergrößern  
'z' - Zoom  
'l' - 'orbiter.log' an/aus  
't' - 'time-check' an/aus; 'time-check'-Zeit (gibt an, bei welcher Zeit die Simulation stoppt)  
'e' - energy-options (gibt an, bei welchen Abweichungen das Programm stoppt)  
'a' - Drehwinkel verändern  
'm' - Bewegungsschrittweite verändern  
'8' - hoch  
'2' - runter  
'4' - links  
'6' - rechts  
'1' - linksrum drehen  
'3' - rechtsrum drehen  
'POS1' - ursprüngliche Position  
'END' - Drehungen rückgängig machen

#### 5.3. ORBITER 3D

'Esc' - Menü  
'c' - clear screen  
's' - start/stop

- 'r' - restart
- 'o' - Objekt zentrieren [z.B.: '1' für Objekt1]
- 'v' - Informationen über Objekt [z.B.: '1' für Objekt1]
- 'p' - Informationsleiste an/aus
- 'b' - Bildschirminhalt in bmp-Datei speichern
- '-' - verkleinern
- '+' - vergrößern
- 'z' - Zoom / Blickwinkel verändern
- 'l' - 'orbiter.log' an/aus
- 't' - 'time-check' an/aus; 'time-check'-Zeit (gibt an, bei welcher Zeit die Simulation stoppt)
- 'e' - energy-options (gibt an, bei welchen Abweichungen das Programm stoppt)
- 'a' - Drehwinkel verändern
- 'm' - Bewegungsschrittweite verändern
- 'Pfeiltaste vor' - vor
- 'Pfeiltaste zurück' - zurück
- 'Pfeiltaste links' - links
- 'Pfeiltaste rechts' - rechts
- 'Bild hoch' - hoch
- 'Bild runter' - runter
- '8' - nach unten neigen (um z-Achse)
- '2' - nach oben neigen (um z-Achse)
- '4' - nach links drehen (um y-Achse)
- '6' - nach rechts drehen (um y-Achse)
- '1' - linksrum drehen (um z-Achse)
- '3' - rechtsrum drehen (um z-Achse)
- 'POS1' - ursprüngliche Position
- 'END' - Drehungen rückgängig machen

## 6. Logdatei

ORBITER besitzt die Möglichkeit, eine Logdatei zu erstellen, mit der die Simulation protokolliert werden kann. Im Folgenden wird nun kurz auf den Aufbau dieser Datei eingegangen.

### 6.1. ORBITER 2D

#### 6.1.1. Header

Die Logdatei besitzt einen Header, in dem einige simulationsspezifische Daten gespeichert werden. Sein Anfang wird durch <header> und sein Ende durch </header> gekennzeichnet.

Der erste Eintrag innerhalb des Headers besteht aus dem Datum und der Uhrzeit des Programmstarts. Darauf folgen Datenpakete von je drei Zeilen. Sie geben den Namen eines Objekts, seine Masse (in kg) und seinen Radius (in m) an (wobei dieser jedoch bei der bisherigen Version von ORBITER stets 0 ist).

#### 6.1.2. Datensätze

Der Hauptteil der Logdatei besteht aus einer Reihe von einzeiligen, 7-elementigen Datensätzen, wobei die einzelnen Elemente durch drei aufeinanderfolgende Unterstriche getrennt sind:

- Element 1: Nummer des Rechenzyklus
- Element 2: simulationsinterne Zeit
- Element 3: Name des Objekts
- Element 4: x-Koordinate des Objekts
- Element 5: y-Koordinate des Objekts
- Element 6: x-Komponente der Geschwindigkeit des Objekts
- Element 7: y-Komponente der Geschwindigkeit des Objekts

### 6.2. ORBITER 3D

#### 6.2.1. Header

Die Logdatei besitzt einen Header, in dem einige simulationsspezifische Daten gespeichert werden. Sein Anfang wird durch <header> und sein Ende durch </header> gekennzeichnet.

Der erste Eintrag innerhalb des Headers besteht aus dem Datum und der Uhrzeit des Programmstarts. Darauf folgen Datenpakete von je drei Zeilen. Sie geben den Namen eines Objekts, seine Masse (in kg) und seinen Radius (in m) an (wobei dieser jedoch bei der bisherigen Version von ORBITER stets 0 ist).

#### **6.2.2. Datensätze**

Der Hauptteil der Logdatei besteht aus einer Reihe von einzeiligen, 9-elementigen Datensätzen, wobei die einzelnen Elemente durch drei aufeinanderfolgende Unterstriche getrennt sind:

Element 1: Nummer des Rechenzyklus

Element 2: simulationsinterne Zeit

Element 3: Name des Objekts

Element 4: x-Koordinate des Objekts

Element 5: y-Koordinate des Objekts

Element 6: z-Koordinate des Objekts

Element 7: x-Komponente der Geschwindigkeit des Objekts

Element 8: y-Komponente der Geschwindigkeit des Objekts

Element 9: z-Komponente der Geschwindigkeit des Objekts